UNA PROPUESTA DE AULA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN LINEAL Y AFIN DESDE LO VARIACIONAL

DIEGO SOLARTE PABÓN

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
MAESTRIA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI, ENERO DE 2018

UNA PROPUESTA DE AULA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN LINEAL Y AFIN DESDE LO VARIACIONAL

DIEGO SOLARTE PABÓN

Trabajo para optar al título de Magister en Enseñanza de la Matemática. Modalidad profundización

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

MAESTRIA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

SANTIAGO DE CALI, ENERO DE 2018

Dedicatoria

A **DIOS**, por las oportunidades recibidas a lo largo de mi vida

A **mi esposa**, por su apoyo, comprensión y ayuda en mis estudios

A **mi hijo**, por ser el motor de mi vida

A **mi mamá**, por brindarme su amor y dedicación hacia el estudio

A **mis hermanos**, por su apoyo incondicional en cada uno de los momentos de mi vida

A **toda mi familia**, por su constante apoyo y colaboración

Agradecimientos

A mis profesores y compañeros de la maestría en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Tecnológica de Pereira, por brindarme la gran oportunidad de seguir creciendo en la formación en educación matemática, proceso fundamental en mi labor docente.

Al profesor Harold Castillo, por su asesoría y orientación en este trabajo de investigación.

A los estudiantes de grado 10°-5 de la Institución Educativa Técnico de Comercio Santa Cecilia, por su dedicación y compromiso en la implementación de la propuesta de aula. También, a la parte directiva de la Institución, por brindarme la oportunidad de llevar a cabo la experiencia en el aula de clase.

Tabla de contenido

Índice de tablas

Índice de figuras

Resumen

Este trabajo, presenta una propuesta de aula para la enseñanza del concepto de función lineal y afín, compuesta por cuatro situaciones problema, de las cuales, las tres primeras se resuelven a lápiz y papel, mientras que la cuarta situación, parte desde un contexto matemático, utilizando como herramienta el software educativo GeoGebra.

La investigación, se realiza teniendo en cuenta algunos aspectos de la ingeniería didáctica, la cual se desarrolla en cuatro fases, que se describen en el capítulo de la metodología. Cada una de las situaciones, contiene dos tareas, que están enunciadas a partir de los diferentes sistemas de representación semiótica, tales como: verbal, tabular, gráfico y simbólico. Para cada una de las tareas propuestas, se realiza un análisis a priori de las posibles transformaciones (tratamiento o conversión), que deben realizar los estudiantes en la puesta en correspondencia entre dos registros de representación semiótica.

La implementación y análisis de las producciones de los estudiantes de grado 10°-5 de la Institución Educativa Técnico de Comercio Santa Cecilia, evidencian el aprendizaje del concepto de función lineal y afín, que está relacionado con los aspectos del pensamiento variacional, la modelación matemática, y la conversión de los diferentes registros de representación enunciados anteriormente.

Palabras clave: Educación matemática, Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, Modelación matemática, Situaciones problema, Registros de representación semiótica, Transformaciones (tratamientos o conversiones), GeoGebra y función lineal y afín.

Abstrac

This document presents a classroom proposal for the teaching of the concept of linear and related function, composed of four problem situations, of which the first three are solved in pencil and paper, while the fourth situation starts from a mathematical context, using GeoGebra educational software as a tool.

The research is realized taking in account many aspects of didactic engineering, which is developed in four phases, which are described in the methodology chapter. Each one of the situations, contains two tasks, which are enunciated from the different systems of semiotic representation, such as: verbal, tabular, graphic and symbolic. For each one of the proposed tasks, an analysis is made a priori of the possible transformations (procesing or conversion), that students must make in the correspondence between two registers of semiotic representation.

The implementation and analysis of the productions of students of grade 10 -5 of the Institución Educativa Técnico de Comercio Santa Cecilia, evidence the learning of the concept of linear and related function, which is related with the aspects of variational thinking, mathematical modeling , and the conversion of the different representation records mentioned previously in the last paragraph.

Keywords: Mathematical education, Variational thinking and algebraic and analytical systems, Mathematical modeling, Problem situations, Registers of semiotic representation, Transformations (treatments or conversions), GeoGebra and Linear and related functions.

Introducción

Este trabajo de investigación, gira en torno al estudio del concepto de función, a partir de situaciones problemas dadas en distintos contextos, que contienen distintos registros de representación semiótica, tales como: verbal, tabular, gráfico y algebraico. Esta clase de registros, tal y como se mencionan en el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos de los Estándares de Competencias en Matemáticas del MEN, permitieron a través de transformaciones (tratamientos o conversiones), que los estudiantes de grado 10°-5 de la Institución Educativa Técnico de Comercio Santa Cecilia de la ciudad de Cali, a través la modelación matemática, reconocieran las funciones lineal y afín.

En el primer capítulo, se presentan los aspectos generales de la investigación, tales como el planteamiento del problema, sustentado en los referentes curriculares dados por el MEN, específicamente en el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, que permiten dar paso a la formulación del objetivo general y los objetivos específicos. Posterior a estos, se realiza la justificación de la investigación, teniendo en cuenta estos referentes y los resultados de las pruebas saber de los años 2015 y 2016 de la institución donde se implementó la propuesta de aula. Por último, este capítulo contiene las investigaciones realizadas respecto al proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de función lineal y afín.

En el segundo capítulo, se establece la metodología de trabajo, donde a partir de algunos aspectos de la ingeniería didáctica, se establecen cuatro fases para el desarrollo del trabajo de investigación.

En el tercer capítulo, se establece el marco teórico de la investigación, donde se describen los referentes matemáticos del concepto de función lineal y afín, la modelación matemática, establecida a partir de los referente teóricos dados por el MEN, el software GeoGebra como herramienta en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, las situaciones problema como estrategia para la conceptualización de las funciones trabajadas y, la comprensión del concepto de función, a partir de los registros de representación semiótica.

El cuarto capítulo, se refiere al diseño de las cuatro situaciones problema, iniciando con una descripción general de cada una de las tareas que la conforman, para dar paso al análisis a priori, de cada una de las preguntas, que están organizadas a través de tablas que contienen entre otros elementos, contenidos, desempeños esperados y los tipos de representación (tratamiento o conversión) esperados por los estudiantes.

El quinto capítulo, hace referencia a los resultados y análisis de resultados de cada una de las situaciones problema, de acuerdo a las producciones de los estudiantes. Los resultados, hacen referencia al tipo de representación realizado en cada una de las preguntas de cada tarea por los estudiantes de grado 10°-5 de la Institución Educativa Técnico de Comercio Santa Cecilia. Estos, se organiza a través de tablas que contienen tipos de respuestas, número de estudiantes y porcentaje. Posterior a cada uno de estos resultados, se realiza un análisis de los tratamientos o conversiones realizadas por los estudiantes, para contrastarlos con la intención planteada en el capítulo anterior, relacionando algunas evidencias de respuestas.

El sexto capítulo, se refiere a las conclusiones generales y algunas reflexiones didácticas sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de función lineal y afín, a partir de la investigación realizada con los estudiantes de grado 10°- 5 de la Institución Educativa Técnico de Comercio Santa Cecilia de la ciudad de Cali.

El capítulo siete, contiene las referencias bibliográficas utilizadas en la investigación realizada. Al finalizar se presentan los anexos, que se refieren a las producciones de los estudiantes en las situaciones problema 1 a 4.

1. Planteamiento del problema

1.1 Planteamiento del problema

El concepto de función, es uno de los conceptos matemáticos de mayor trascendencia a lo largo de su epistemología, y por ende, su aprendizaje en la escuela es de gran importancia. En la educación básica y media de Colombia, a partir de unos referentes curriculares, dados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), su proceso de enseñanza, se inicia desde los primeros grados de escolaridad.

Desde hace algunas décadas, el aprendizaje del concepto de función lineal y afín, se ha constituido en un objeto de estudio de la educación matemática, ya que su proceso es complejo, porque aborda distintos aspectos tales como: referentes curriculares, estrategias, metodologías, sistemas de representación, pensamientos, entre otros.

En la mayoría de los casos, el proceso de enseñanza y aprendizaje de este concepto matemático, se limita al tratamiento de una expresión de la forma $y = f(x) = k.x + b$, donde se asigna valores a x para obtener valores de y, obteniendo puntos de la forma $P(x, y)$, que se representan en un plano cartesiano. Pero esto proceso es incompleto, su complejidad relaciona, desde un enfoque variacional, una variedad de representaciones (grafica, cartesiana, expresión algebraica, entre otras) que las relaciona y las caracteriza.

Carlson (como se citó en Valoyes y Malagón, 2004) presenta resultados de una investigación con estudiantes universitarios, que después de haber completado su ciclo de escolaridad, se concluye que estos, no han desarrollado la habilidad de razonar acerca de la variación entre magnitudes, de tal forma que un estudiante, pueda construir una imagen mental de cambio en una cantidad y caracterizarla.

En investigaciones realizadas por Vasco (2003), Azcárate y Deulofeu (1990), muestran que la comprensión del concepto de función lineal y afín, se lleva a cabo desde lo que se plantea en el pensamiento variacional, el cual, está relacionado con las representaciones semióticas, mencionadas anteriormente.

En la educación básica y media Colombiana, algunos de los referentes teóricos, que un docente de matemáticas, debe tener en cuenta al iniciar el proceso de planear, ejecutar y evaluar la enseñanza y aprendizaje de un objeto matemático en un curso, son los Lineamientos Curriculares de Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998), que se reafirman con los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006). A partir de la reflexión de estos documentos, los procesos mencionados anteriormente, ya no se desarrollan de forma lineal, realizando definiciones, actividades, ejercicios, resolución de problemas, sino, que se realizan de forma cíclica, involucrando varios criterios, tales como: competencias matemáticas, aprendizaje, contextos, evaluación, estándares, etc., que garantizan que se lleve a cabo un proceso de aprendizaje significativo por parte de los estudiantes, es decir, que sean matemáticamente competentes frente a distintas situaciones dadas en distintos contextos.

Para que los estudiantes sean competentes matemáticamente hablando, el docente debe ser altamente competente, donde a partir de unos supuestos sobre las matemáticas (las matemáticas como una actividad humana, como el resultado acumulado y organizado de comunidades de matemáticos, entre otros), los profesionales de la enseñanza de la educación matemática, distingan las facetas básicas del conocimiento matemático (la práctica y la formal) y los tipos de éste, el conceptual y procedimental, que permitan en los estudiantes desarrollar, el saber qué, el saber qué hacer y el saber cómo, cuándo y por qué hacerlo, en cada una de las actividades planeadas en un curso escolar, que deben estar íntimamente relacionadas con los cinco procesos generales de la actividad matemática: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos (MEN, 1998).

Pero estos procesos que conllevan a los estudiantes a ser matemáticamente competentes, se concretan de manera específica, de acuerdo a lo establecido en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, en el pensamiento lógico y el pensamiento matemático, el cual se subdivide en los cinco tipos de pensamiento: El pensamiento numérico, el pensamiento espacial, el pensamiento métrico o de medida, el pensamiento aleatorio o probabilístico y el pensamiento variacional (MEN, 2006).

Teniendo en cuenta esta perspectiva curricular, el trabajo de investigación, se centra en la comprensión que tienen un grupo de estudiantes de educación básica y media de Colombia, referentes al concepto de función lineal y afín. Este objeto matemático, se presenta como un concepto importante en las matemáticas escolares, por lo tanto, (…) “los maestros deben tener en cuenta que este concepto es complejo y que su construcción no se lleva a cabo en un año determinado de escolaridad sino que se da a lo largo de ella” (Valoyes y Malagón, 2004, p.58).

El pensamiento lógico matemático desde el cual se puede reorganizar el currículo, de tal forma, que el concepto de función lineal, emerja como una alternativa dinámica, coherente y significativa, es el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, a través de la modelación de procesos y situaciones que implican un modelo matemático. En los estándares básicos de competencias en matemáticas (MEN, 2006), se establece que

> (…) este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así

> como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos (p.66).

El énfasis del pensamiento variacional, es el estudio de la variación y el cambio, que se lleva a cabo, a partir de los procesos que le son inherentes, esto es, los procesos de modelación de fenómenos físicos, la resolución de problemas y la generalización de patrones y relaciones entre números o hechos numéricos (Valoyes y Malagón, 2004).

En palabras de Vasco (2003), el pensamiento variacional, puede describirse como una manera de pensar dinámica, cuyo principal propósito, es la modelación matemática, proceso matemático que requiere de los otros tipos de pensamiento matemático mencionados anteriormente. Además, el movimiento mental de este tipo de pensamiento, tiene cuatro momentos: El primer momento, es la captación de lo que cambia y de lo que permanece constante, el segundo momento, es la producción de sistemas mentales, que se llaman "modelos mentales", que se echan a andar, para ver qué resultados producen, para así llegar al último momento, de comparar esos resultados con lo que ocurre en el proceso que se trata modelar.

En la educación básica secundaria, el estudio de la variación y el cambio, está directamente relacionado con el sistema algebraico, que se expresa a través de otras representaciones tales como: lenguaje ordinario, numéricas (tablas), las gráficas (diagramas), y las icónicas. El estudio de las relaciones funcionales que pueden detectarse de distintos contextos (las matemáticas, otras ciencias, la vida cotidiana, otros), por ejemplo, las relaciones entre costo ($) y cantidad de fotocopias, entre la temperatura a lo largo de un día, etc., permite coordinar cambios entre dos magnitudes variables, que son la primera aproximación a la noción la función (MEN, 2006).

La existencia de dos magnitudes variables y una relación de dependencia entre estas variables, cuya expresión depende del lenguaje utilizado gráfico, tabular, ecuaciones, entre otros, permite introducir el concepto de función (Farfán y García, 2005).

En este sentido, el aprendizaje del concepto de función lineal y afín, utiliza contextos de representación semióticos, realizando dos clases de transformaciones (que dependen del sistema semiótico) de las representaciones semióticas, la conversión y el tratamiento, pero además, requiere una coordinación interna, que ha de ser construida, entre los diversos sistemas de representación (Duval, 1999).

Teniendo en cuenta lo anterior, este trabajo de investigación, se centra en la construcción del concepto de función lineal y afín, a partir de situaciones problema, dadas en distintos contextos (matemáticas y de las otras ciencias), que impliquen modelos de variación lineal entre magnitudes, que permita una articulación entre los distintos registros de representación

En resumen, en este trabajo se trata de responder la pregunta:

¿Qué aspectos del pensamiento variacional se favorecen, en un grupo de estudiantes de educación media, a través de la implementación de una propuesta de aula sobre el concepto de función lineal y afín, a partir de situaciones problema que implican distintos registros de representación?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

Realizar un acercamiento al concepto de función lineal y afín con un grupo de estudiantes de grado 10° de la Institución Educativa Técnico de Comercio Santa Cecilia, a través de situaciones problemas que implican distintos registros de representación semiótica.

1.2.2 Objetivos específicos

- Elaborar una propuesta de aula, a partir de situaciones problemas que contengan modelos de variación lineal entre magnitudes, que permitan el tratamiento y la conversión entre los distintos registros de representación de la función lineal y afín.
- Caracterizar algunos aspectos del concepto de función lineal y afín, según las producciones de un grupo de estudiantes de grado 10° de la Institución Educativa Técnico de Comercio Santa Cecilia, a través de situaciones problemas que implican distintos registros de representación semiótica.
- Evaluar el proceso de los estudiantes de grado 10° de la Institución Educativa Técnico de Comercio Santa Cecilia, en la construcción del concepto de función lineal y afín, a partir de la propuesta de aula implementada.

1.3 Justificación

A partir de lo propuesto por el MEN, se tiene una idea más clara de la expresión "saber enseñar en educación matemática", respuesta que se puede plantear a partir de la didáctica de las matemáticas, donde autores como Brousseau, Duval, Freudenthal, entre otros, aportan a los enseñantes de la asignatura, los distintos enfoques de la didáctica de las matemáticas, teoría fundamental, al momento de realizar los procesos de orientar, planear y ejecutar una práctica educativa.

Brousseau (1990, 1991), hace referencia a la didáctica bajo tres enfoques. En el primer enfoque, la determina como una palabra culta para nombrar el acto de enseñar, que es el ejercicio mismo de la didáctica, que a partir de la definición de Comenius, "la didáctica se convierte en el proyecto social de hacer apropiar a un alumno o varios un saber constituido". En este caso, el enseñante es un didacta que determina los objetivos y sus métodos de enseñanza. El segundo enfoque, designa a la didáctica como el conjunto de técnicas que sirven para enseñar, apoyadas en: currículos, objetivos, medios de evaluación, materiales, softwares educativos, entre otros. En este caso, el enseñante es un didacta que produce y propaga innovaciones. El tercer enfoque, hace de la didáctica, una disciplina científica, que recoge los aportes de los enfoques anteriores, donde el enseñante es un investigador que estudia la actividad de la enseñanza.

En este sentido, en la actividad de enseñanza del concepto de función lineal y afín, uno de los aspectos que se tienen en cuenta, son los referentes curriculares dados por el MEN.

Los referentes teóricos tales como los lineamientos curriculares, estándares básicos de competencias matemáticos, entre otros, avalan la construcción de este concepto matemático. Por ejemplo, a partir de los estándares de competencias en matemáticas para grados 6° y 7°, el aprendizaje del concepto de función lineal, se realiza, a partir de la proporcionalidad directa entre dos variables. A partir de situaciones, que implican magnitudes directamente proporcionales, el análisis de las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa, llevan al aprendizaje de un modelo de función, que es la expresión $y = k.x$ (MEN, 2006).

Por otro lado, los informes por colegios de las pruebas saber de 3°, 5° y 9° de matemáticas dados por el Ministerio de Educación, visibilizan los aprendizajes de cada una de las competencias asociadas (comunicación, razonamiento y resolución), en los que es necesario realizar acciones pedagógicas para el mejoramiento. Las tablas 1 y 2, muestran respectivamente, los aprendizajes a mejorar por cada una de las competencias evaluadas en los años 2015 y 2016, respecto al pensamiento numérico variacional, de la Institución Educativa Técnico de Comercio Santa Cecilia, institución educativa pública de Cali (MEN, 2015).

Tabla 1. Competencias y aprendizajes a mejorar referentes a la variación en el año 2015.

Competencia	Aprendizajes por mejorar
Comunicación	El 50 % de los estudiantes no usa y relaciona diferentes representaciones para modelar situaciones de variación El 40 % de los estudiantes no identifica características de gráficas cartesianas en relación con la situación que representan.
Resolución	El 42 % de los estudiantes no resuelve problemas en situaciones de variación con funciones polinómicas y exponenciales en contextos aritméticos y geométricos.

Tabla 2. Competencias y aprendizajes a mejorar referentes a la variación en el año 2016.

Competencia	Aprendizajes por mejorar
Comunicación	El 73 % de los estudiantes no identifica características de gráficas cartesianas en relación con la situación que representan. El 72 % de los estudiantes no establece relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
Resolución	El 70 % de los estudiantes no usa ni relaciona diferentes representaciones para modelar situaciones de variación. El 69 % de los estudiantes no resuelve problemas en situaciones de variación con funciones polinómicas y exponenciales en contextos aritméticos y geométricos.

Los resultados anteriores, muestran que más del 50% de los estudiantes, deben mejorar respecto a los aprendizajes que suscita la variación entre magnitudes que modelan funciones lineales. Teniendo en cuenta este informe, es posible establecer, que el discurso matemático escolar referente a este objeto de aprendizaje, se ha limitado al carácter estático de la expresión algebraica que representa la función, es decir, a partir de la construcción de una tabla de valores, se realiza su gráfica, sin establecer ninguna clase de relaciones entre estas representaciones. Sin embargo, la actividad matemática referente a este objeto de aprendizaje, se realiza a través de la coordinación de los diferentes registros de representación semiótica (Duval, 2001).

Es por ello, que este trabajo de investigación, se enfoca en el aprendizaje del concepto de función lineal y afín, desde lo variacional, que se refiere al reconocimiento, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, que utiliza principalmente la modelación y representación de diferentes sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, tabulares, gráficos o algebraicos (MEN, 2006).

En este sentido, el reconocimiento por parte de los estudiantes, del modelo de función $y = f(x) = kx + b$, les permitirá caracterizar aspectos relacionados con el concepto de función lineal, tales como: invariantes k y b, constante de proporcionalidad, representaciones (grafica, tabular, expresión algebraica), cambios generados entre representaciones, y la relación de dependencia entre variables.

1.4 Antecedentes

La construcción del concepto de función lineal y afín en la escuela, es un proceso complejo que implica muchos elementos, por tal motivo, las investigaciones que se tienen en cuenta para el trabajo de investigación, son las desarrolladas en educación matemática, a partir de los registros de representación.

Duval (2006), presenta resultados de una investigación con 360 estudiantes entre 15 y 16 años, repartidos en 12 clases, donde realiza tareas de reconocimiento cualitativo y de discriminación visual de dos gráficas. Realiza tareas de trazo visual de contraste entre dos gráficas, para reconocer la característica semántica que corresponde a la escritura simbólica, es decir, determinar el sentido de la inclinación, ascendente o descendente. El mayor porcentaje promedio que se alcanzó en esta tarea fue de 65%. De igual forma, en otra tarea de discriminación visual de dos gráficas, el contraste entre ascendente y descendente, es decir, ($k > 0$ y $k < 0$), el mayor porcentaje que se alcanzó en esta tarea fue de 46%.

Azcarate y Deulofeu (1990), llevan a cabo un estudio sobre la enseñanza y el aprendizaje de las funciones, proceso que se realiza a partir del estudio de fenómenos de variación y de cambio, a partir de situaciones de la vida real, que permiten representar la función lineal y afín, a través de diversos lenguajes (verbal, tabular, grafico, algebraico,…), para así, poner de manifiesto algunas de sus características.

Posada y Villa (2006), desarrollan una propuesta para trabajar el concepto de función lineal desde una perspectiva variacional, a partir de la noción de variación, el proceso de modelación y los registros semióticos de representación. En el desarrollo de su propuesta, muestran el concepto de función lineal, como un modelo matemático, que atrapa la variación y el cambio entre magnitudes, que se representan a través de distintos registros de representación. Dentro de los resultados, Posada y Villa (2006), concluyen, entre otros, que:

> El reconocimiento de la razón de cambio constante como elemento que identifica las funciones lineales, la compresión de la función lineal como un modelo que atrapa la covariación entre dos magnitudes y la identificación de las características que identifican una función lineal desde los diferentes registros de representaciones (p.174).

En un contexto de educación superior, Guzmán (1998) describe un estudio con estudiantes de ingeniería, donde a partir de los registros de representación semiótica, se incide en el aprendizaje de las propiedades de las funciones. Se aplicó un cuestionario de 16 ítems a 75 estudiantes de un curso de cálculo diferencial de primer año en la universidad (18 – 19 años), obteniendo como resultado, que los estudiantes son mono registros, es decir, no realizan la coordinación de al menos dos de ellos, tal y como lo establece Duval (2006).

2. Metodología de la investigación

Como metodología de investigación, se tomaron algunos elementos de los aspectos característicos de la ingeniería didáctica, ya que la propuesta de trabajo, se centra en la experimentación de una propuesta de aula referente al concepto de función lineal y afín, para lo cual es necesario tener en cuenta, la concepción, realización, observación, y análisis de las tareas propuestas en cada una de las situaciones problemas propuestas. El proceso experimental, se realizó teniendo en cuenta, cuatro fases: La fase 1 de análisis preliminar, la fase 2 de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas, la fase 3 de experimentación y la fase 4 de análisis a posteriori (Artigue, Douady, Moreno y Gómez, 1995).

En la primera fase de análisis preliminar, se tuvo en cuenta el análisis epistemológico del concepto de función lineal y afín. Los referentes curriculares dados por el MEN, tales como el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, y la modelación, son los primeros referentes preliminares para indagarse sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de este concepto. De igual forma, en el marco teórico de referencia, la teoría de los registros de representación semiótica de Duval (1999, 2001, 2006), las situaciones problemas (Obando y Munera, 2003) y GeoGebra como software educativo, son otros referentes que permiten tener una visión más clara de la propuesta de aula implementada. De igual forma, en el análisis preliminar del tema de investigación, fue necesario reconocer los antecedentes de algunas investigaciones didácticas que se han realizado respecto al tema implementado en el aula de clase.

El diseño de las cuatro situaciones problema que conforman la propuesta de aula, se fundamentó en el marco teórico mencionado anteriormente. En este sentido, cada una de las situaciones, fueron diseñadas, a partir de los elementos básicos que las constituyen, y las tareas, tratan de responder a actividades de tratamiento y conversión del concepto matemático, ya sea de forma gráfica, tabular, expresión algebraica o lenguaje verbal, de tal forma que los estudiantes reconozcan los modelos de funciones $y = f(x) = kx$, y $y = f(x) = kx + b$, a partir de la modelación matemática.

En la fase 2 de concepción de análisis a priori, las variables comando (Artigue *et al*., 1995), que se tienen en cuenta en la propuesta de aula, para cada una de las tareas de las situaciones, son tablas que van acompañadas de su respectiva pregunta, los contenidos, el desempeño esperado y el tipo de representación que se realiza. El propósito de este análisis a priori, es determinar de forma anticipada el tipo de representación (tratamiento o conversión), que realizan los estudiantes de grado 10° de la Institución Educativa Técnico de Comercio Santa Cecilia de la ciudad de Cali, cuando resuelven situaciones problemas (dadas desde distintos contextos), que implican un registro de representación semiótica: verbal, tabular, gráfico y algebraico. Este procedimiento se realiza, para organizar y sistematizar la información a obtener de los estudiantes, y contrastarla con los resultados obtenidos en la implementación de la propuesta.

La fase 3 de experimentación, o de aplicación de la propuesta en el aula, se implementó entre los meses de marzo y junio del año lectivo 2017 con estudiantes del grupo 10° - 5 de la jornada de la mañana, de la Institución Educativa Técnico de Comercio Santa Cecilia, sede principal, institución de carácter oficial de la entidad territorial Santiago de Cali, ubicada en la comuna 2 de la ciudad, en la calle 61 AN # 2GN – 62, en el barrio los Alamos, perteneciente al estrato socioeconómico 3, aunque la institución cuenta con estudiantes de los estratos 1, 2 y 3.

La selección del grupo, obedeció a disponibilidad de horario, ya que las horas de matemáticas asignadas en el horario académico establecido por la institución, coincidieron con el grupo de trabajo. Asimismo, la elección del grupo se realiza teniendo en cuenta las necesidades académicas de los estudiantes, porque de acuerdo a los resultados de las pruebas saber del año 2016, los estudiantes deben mejorar en algunos resultados de aprendizaje referentes al concepto de estudio de esta investigación. El total de estudiantes fue de 27, sin embargo, se finalizó con 23, ya que 4 de ellos se retiraron de la Institución cuando se implementaba la propuesta. La edad de los estudiantes, oscila entre los 15 y 17 años. La jornada académica de los estudiantes es de 06: 30 a.m., hasta las 03:30 p.m. Los estudiantes de grado 10°-5, tienen una asignación en su horario de clase, de cuatro horas de matemáticas semanales, distribuidas en dos días de la semana.

La metodología de implementación, fue el trabajo en equipo de tres estudiantes para el desarrollo de toda la propuesta, con un tiempo asignado para cada tarea, de acuerdo a la complejidad de cada situación problema propuesta. Los estudiantes, resolvieron cada una de las tareas de cada situación, de acuerdo a la teoría de las situaciones problema (Obando y Munera, 2003), es decir, al interactuar entre ellos, con el profesor, a través de un objeto de conocimiento (el concepto de función lineal y afín), formularon hipótesis, desarrollaron planes de acción, generalizaron, es decir, a generaron su actividad matemática. En la solución de cada una de las tareas, los estudiantes, utilizaron dos horas de clase, que equivalen a 110 minutos. Por esta razón, el tiempo total utilizado en la implementación de la propuesta de aula, fue de 20 h de clase.

Para la aplicación de la situación 4, se utilizó la sala de sistemas de la Institución, la cual cuenta con 30 computadores portátiles con acceso a internet, y con el software GeoGebra instalado en cada uno de ellos.

Cada una de las tareas de cada situación, se desarrolló bajo la siguiente estructura: lectura inicial general, desarrollo de la tarea y formalización (institucionalización del saber). En algunas preguntas fue necesario la intervención del docente, esto debido a que el propósito de ésta no era explícito o claro para el grupo de trabajo. Por ejemplo, en las preguntas de la situación 1, palabras como razón entre…, y magnitudes, causaron inseguridad en los estudiantes.

La institucionalización del saber, se realizó, a partir de la socialización de cada una de las preguntas de cada tarea de cada situación. Los estudiantes, participaron de forma activa, en el proceso anterior, validando o refutando el trabajo realizado por los otros grupos. En algunas ocasiones, fue necesario realizar la conceptualización de la tarea, en otra sesión de clase. El proceso de recolección de la información, estuvo precedido por la implementación de cada una de las situaciones problema, información que se encuentra registrada en textos escritos de los estudiantes, donde aparecen sus nombres, el grado y la fecha.

La última fase de la investigación, es el análisis a posteriori, que se realiza a partir de los datos recogidos en la implementación de la propuesta de aula. Estos datos o resultados de la investigación, son producciones de los estudiantes que se obtuvieron de los cuestionarios de cada una de las cuatro situaciones propuestas, y se organizan a partir de tablas que contienen títulos (refiriéndose a la pregunta de cada tarea de cada situación), clasificación de la respuesta $(T_1, \dots, T_n, 1 \leq n \leq 4)$, respuesta, número de estudiantes y porcentaje. Al finalizar los resultados de cada una de las preguntas de cada tarea, se realiza un análisis a posteriori, de la actividad de transformación (tratamiento o conversión) de cada uno de los registros de representación semiótica formulados en cada una de las preguntas de cada tarea, referentes al concepto de función lineal y afín. Posterior a este análisis, se anexan evidencias de las respuestas de los estudiantes de la Institución Educativa Técnico de Comercio Santa Cecilia de la ciudad de Cali.

3. Marco teórico de referencia

3.1 Referentes matemáticos

El concepto matemático de función, se ha construido a lo largo de la historia de las matemáticas, desde los Babilonios y los Griegos, pasando por Fermat, Descartes, Leibnitz entre otros, hasta llegar al siglo XXVIII, donde figuras como Euler, describen la función como $f\ (x)$ (Farfán y García, 2005). En el siguiente siglo, en el año de 1837, el matemático Dirichlet, propuso definir el concepto de función, así:

> Si una variable $\boldsymbol{y}$ está relacionada con otra variable $\boldsymbol{x}$ de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a $\boldsymbol{x}$ hay una regla según la cual queda determinado un único valor de $\boldsymbol{y}$, entonces se dice que $\boldsymbol{y}$ es una función de la variable independiente $\boldsymbol{x}$ (Azcárate y Deulofeu, 1990, p.52).

Hacia mediados del siglo pasado, con la introducción de la teoría de conjuntos, se supuso la generalización del concepto de función, que recogía todas las nociones establecidas a lo largo de su historia. Azcárate y Deulofeu (1990), afirman:

> Dados dos conjuntos arbitrarios A y B una función (o aplicación) de A en B es una ley que a cada elemento x de A hace corresponder un solo elemento y de B; o si se prefiere, una función de A en B es un subconjunto F del producto cartesiano A $\times$ B tal que si (x, y) y (x, z) pertenecen a F entonces $\mathrm{y} = \mathrm{z}$ (p.53).

Lipschuttz (1970), define el concepto de función, así:

> Si a cada elemento de un conjunto A se le hace corresponder un único elemento de un conjunto B, se dice que el conjunto, f, de tales asociaciones es una función (o aplicación) de A en B y se denota por

$$f: A \to B \quad \text{o} \quad A \xrightarrow{f} B$$

El único elemento de B que, por la función f, le corresponde a $a \in A$ se representa por $f(a)$ y se llama valor de f en a o, también, imagen de a por f. El dominio de f es A, el codominio es B. A toda función $f: A \to B$ le corresponde en $A \times B$ una relación definida por

$$\{\langle a, f(a)\rangle : a \in A\}$$

Este conjunto es el grafo de f. el dominio de imágenes o dominio de valores de f, denotado por $f[A]$, es el conjunto de las imágenes, es decir, $f[A] = \{f(a) : a \in A\}$ (p.17).

De igual forma, en otros libros de texto de matemática universitaria, el concepto de función, se define de forma similar, es decir, teniendo en cuenta la teoría conjuntista.

Restrepo (1998), afirma:

Sean X y Y colecciones de objetos, posiblemente conjuntos. Una función de X en Y es una relación entre los elementos de X y los elementos de Y. Pero es una relación con una característica muy especial: cada $x \in X$ se relaciona con uno y sólo uno un $y \in Y$. Escribiremos:

$$x \to y$$

Para indicar que $y \in Y$ es el único elemento relacionado con $x \in X$. Se suele decir que $x \in X$ es la variable independiente y $y \in Y$ es la variable dependiente (y depende de x) (p.35).

Esta definición, simboliza el concepto de función como lo había hecho el matemático Suizo, Leonard Euler, $y = f(x)$ que significa que $\boldsymbol{y}$ es función de $\boldsymbol{x}$, donde cada valor de la variable x (variable independiente) está asociado con un valor determinado de otra variable y (variable dependiente) (Azcárate y Deulofeu, 1990).

Como esta investigación se centra en la función lineal, a continuación se describen algunas definiciones referentes a este concepto, desde un punto de vista matemático.

Restrepo (1995), define el concepto de función lineal, así:

Sean E y F espacios vectoriales sobre K. una función u de E en F es lineal si

$$u\,(x+y) = u(x) + u(y) \quad ; \quad x, y \in E$$

$$u\,(\alpha x) = \alpha u(x) \qquad\qquad ; \quad \alpha \in K, x \in E$$

A las funciones lineales se les llama también transformaciones lineales, operadores lineales, etc. (pp. 37-38).

De igual forma, Apostol (1991) define el concepto de función lineal de la siguiente manera:

Una función g definida para todo real x mediante una formula

$$g(x) = ax + b$$

Se llama función lineal, porque su grafica es una recta. El número b es la ordenada en el origen; es la coordenada $\boldsymbol{y}$ del punto $(0, b)$ en el que la recta corta al eje $\boldsymbol{y}$. El número a es la pendiente de la recta (p. 67)

Para el trabajo de esta investigación, se utilizan la función lineal, cuyo modelo es la expresión algebraica $y = f(x) = kx$, donde k es la constante de proporcionalidad, que se obtiene de la razón entre la variable dependiente y, y la variable independiente x, y la función lineal afín, cuyo modelo matemático es la expresión $y = f(x) = kx + b$, donde k es la constante de proporcionalidad, que se obtiene de la razón entre los incrementos de la variable dependiente y, y los incrementos de la variable independiente x, y b es una constante aditiva. La expresión

$y = f(x)$, representa que existe una relación entre la variación de la magnitud dependiente y la independiente (Valoyes y Malagón, 2004).

3.2 La modelación matemática

En la actividad matemática escolar, los estudiantes aprenden matemáticas "haciendo matemáticas", lo que supone como esencial, la resolución de problemas, proceso general de la actividad matemática, que puede convertirse en el principal eje organizador del currículo de las matemáticas, porque las situaciones problemas (ligadas a experiencias cotidianas y significativas de los estudiantes), proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido. Los estudiantes, para formular y resolver problemas suscitados a una situación problema, llevan a cabo el proceso de modelación matemática, que se refiere a desplegar una serie de estrategias para resolverlos, encontrar resultados, verificar e interpretar lo razonable de ellos, modificar condiciones y originar otros problemas, para simplificar la situación y seleccionar una manera de representarla: mentalmente, gestualmente, gráficamente o por medio de símbolos aritméticos o algebraicos (MEN, 2006).

> En una situación problema, la modelación permite decidir qué variables y relaciones entre variables son importantes, lo que posibilita establecer modelos matemáticos de distintos niveles de complejidad, a partir de los cuales se pueden hacer predicciones, utilizar procedimientos numéricos, obtener resultados y verificar qué tan razonables son estos respecto a las condiciones iniciales (MEN, 2006, p.53).

> Un modelo puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible. Es una construcción o artefacto material o mental, un sistema –a veces se dice también "una estructura"– que puede usarse como referencia para lo que se trata de

comprender; una imagen analógica que permite volver cercana y concreta una idea o un concepto para su apropiación y manejo (MEN, 2006, p.52)

La figura 1, describe los elementos básicos de la construcción de modelos, que fue propuesta por el matemático holandés Hans Freudenthal (MEN, 1998, p.97).

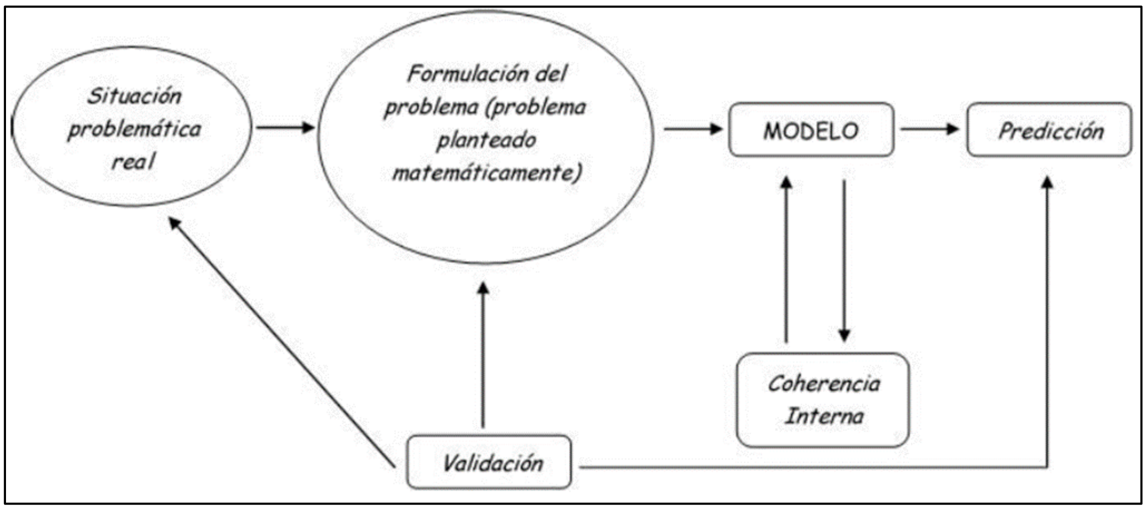


Figura 1: Elementos básicos de la construcción de modelos

El esquema anterior, concibe como punto de partida de la modelación, una situación problemática real, la cual debe ser simplificada, idealizada, estructurada, sujeta a condiciones y suposiciones, que se precisa de acuerdo a los intereses del que resuelve, lo que conduce a la formulación del problema, que contiene las características esenciales de la situación original, y la esquematización del problema, que permite abordarla con elementos matemáticos.

Una vez enunciado el problema matemáticamente, los datos, conceptos, relaciones, condiciones y suposiciones, deben trasladarse a un modelo matemático de la situación original. Este modelo, consta fundamentalmente de ciertos objetos matemáticos, que corresponden a los elementos básicos de la situación problema original o del problema formulado matemáticamente, y ciertas relaciones entre los objetos, que corresponden a relaciones entre los elementos básicos (MEN, 1998).

> Un modelo se produce para poder operar transformaciones o procedimientos experimentales sobre un conjunto de situaciones o un cierto número de objetos reales o imaginados, sin necesidad de manipularlos o dañarlos, para apoyar la formulación de conjeturas y razonamientos y dar pistas para avanzar hacia las demostraciones (MEN, 2006, p.52).

Los resultados matemáticos, obtenidos a partir de un modelo, tienen que ser validados, en el contexto de la situación original. De este modo, el que resuelve el problema, también valida el modelo, si se ajusta al propósito para el cual fue construido. En la validación de un modelo, pueden ocurrir disconformidades que conducen a una modificación del modelo o a su reemplazo por uno nuevo. Si se consigue un modelo satisfactorio, éste se puede utilizar para hacer predicciones acerca del objeto matemático modelado, obtener y verificar resultados razonables a las condiciones iniciales de la situación problema (MEN, 1998).

Treffers y Goffree (como se citó en MEN, 1998), describen la modelación como una actividad estructurante y organizada, que permite descubrir regularidades, relaciones y estructuras reconocidas. Plantean actividades, que pueden ayudar a transferir la situación problemática real a un problema planteado matemáticamente. Algunas de estas, son:

- Identificar las matemáticas específicas en un contexto general
- Formular y visualizar un problema en diferentes formas
- Descubrir relaciones y regularidades
- Transferir un problema de la vida real a un problema matemático
- Transferir un problema del mundo real a un modelo matemático conocido

Asimismo, una vez que el problema ha sido planteado matemáticamente, este puede ser abordado con herramientas matemáticas, para lo cual se pueden realizar algunas actividades como:

- Representar una relación en una formula
- Utilizar diferentes modelos
- Formular un concepto matemático nuevo
- Generalizar (Es el nivel más alto de la modelación)

3.3 El software educativo GeoGebra en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Desde los lineamientos curriculares de matemáticas, ya se tenía una visión de relación intrínseca entre las nuevas tecnologías de la información y el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

> El uso de los computadores en la educación matemática ha hecho más accesible e importante para los estudiantes temas de la geometría, la probabilidad, la estadística y el álgebra. Las nuevas tecnologías amplían el campo de indagación sobre el cual actúan las estructuras cognitivas que se tienen, enriquecen el currículo con las nuevas pragmáticas asociadas y lo llevan a evolucionar (MEN, 1998, p.34)

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de la función lineal y afín, los enseñantes de matemáticas, deben utilizar los recursos didácticos que propicien la "comprensión" de este concepto matemático.

> Los recursos didácticos no sólo como el conjunto de materiales apropiados para la enseñanza, sino como todo tipo de soportes materiales o virtuales sobre los cuales se

estructuran las situaciones problemas más apropiadas para el desarrollo de la actividad matemática de los estudiantes, deben ser analizados en términos de los elementos conceptuales y procedimentales que efectivamente permiten utilizarlos si ya están disponibles, o si no existen, diseñarlos y construirlos (...). Los recursos didácticos pueden ser materiales estructurados con fines educativos (regletas, fichas, cartas, juegos, modelos en cartón, madera o plástico, etc.); o tomados de otras disciplinas y contextos para ser adaptados a los fines que requiera la tarea. Entre estos recursos, pueden destacarse aquellos configurados desde ambientes configurados como calculadoras, software especializado, paginas interactivas de internet, etc. (MEN, 2006, pp. 74-75).

En este sentido, los recursos de software especializado tales como derive, Wolfram Alpha, geogebra, entre otros, son tecnologías intangibles que se deben tener en cuenta al momento de realizar la planeación de la estructura curricular de un concepto matemático, ya que a partir de estos, se pueden realizar actividades que a lápiz y papel, son imposibles.

Duval (2006), afirma que:

El software proporciona herramientas para mostrar "instantáneamente" tantas representaciones diferentes como sean necesarias. Por tanto, los estudiantes también pueden obtener el rango de posibles representaciones de los objetos que se están trabajando o que están usando como herramientas. Además el software puede dar una percepción dinámica de la transformación de la representación frente al soporte estático del papel (p.159).

Un software educativo en la enseñanza de las matemáticas, que permite realizar una coordinación multiregistro de la función lineal y afín, es el software educativo Geogebra, creado por Markus Hohenwarter en el 2002.

Desde una perspectiva de la enseñanza y aprendizaje de la función lineal, el software, se convierte en una herramienta “que les puede permitir mejorar su rendimiento académico y abordar un aspecto clave para aumentar su motivación y que, de alguna manera, suele estarles vedado: la posibilidad de conjeturar, descubrir, comprobar propiedades, en definitiva, de pensar matemáticamente (Giménez, 2016, p.31)

> Desde una perspectiva de aprendizaje, la integración del GeoGebra a las clases de Matemática ha favorecido el desarrollo de las capacidades de los estudiantes para la experimentación, visualización y reconocimiento de invariantes matemáticas, como consecuencia de la interacción de estos sujetos con los objetos representados en su vista gráfica. En lo que respecta a la enseñanza, existe un interés creciente en los profesores por crear materiales con GeoGebra para ser aplicados con sus estudiantes y, posteriormente, ser compartidos con otros colegas a través de un repositorio dispuesto por el Instituto GeoGebra Internacional (Gonzales, 2016, p.11).

3.4 Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización de función lineal y afín

A partir de los referentes curriculares dados por el MEN, los tipos de pensamiento con sus sistemas conceptuales y símbolos, los procesos generales de la actividad matemática y los contextos (contexto de aula, el contexto escolar y el contexto extracurricular), se entrecruzan entre sí en la enseñanza de las matemáticas, para planear, gestionar y proponer “situaciones de aprendizaje matemático significativo y comprensivo –y en particular situaciones problema- para sus alumnos y así permitir que ellos desarrollen su actividad matemática” (MEN, 2006, p.72).

Obando y Múnera (2003), interpretan una situación problema, como:

> (…) un contexto de participación colectiva para el aprendizaje, en el que los estudiantes, al interactuar entre ellos mismos, y con el profesor, a través del objeto de conocimiento, dinamizan su actividad matemática, generando procesos conducentes a la construcción de nuevos conocimientos. Así, ella debe permitir la acción, la exploración, la sistematización, la confrontación, el debate, la evaluación, la autoevaluación, la heteroevaluacion (p.185).

Moreno y Waldegg (Como se citó en Munera 2011), afirman que la situación problema es el detonador de la actividad cognitiva de los estudiantes, que involucra las siguientes características: contener implícitamente los conceptos que se van a aprender, el problema a resolver debe ser accesible a los estudiantes, pero representar un verdadero problema, y debe permitir a los estudiantes utilizar conocimientos anteriores.

Los elementos básicos de una situación problema, son: la red conceptual, el motivo, los medios y los mediadores, las actividades y la evaluación. La figura 2, muestra el esquema básico para el diseño de situaciones problema (Obando y Munera, 2003).

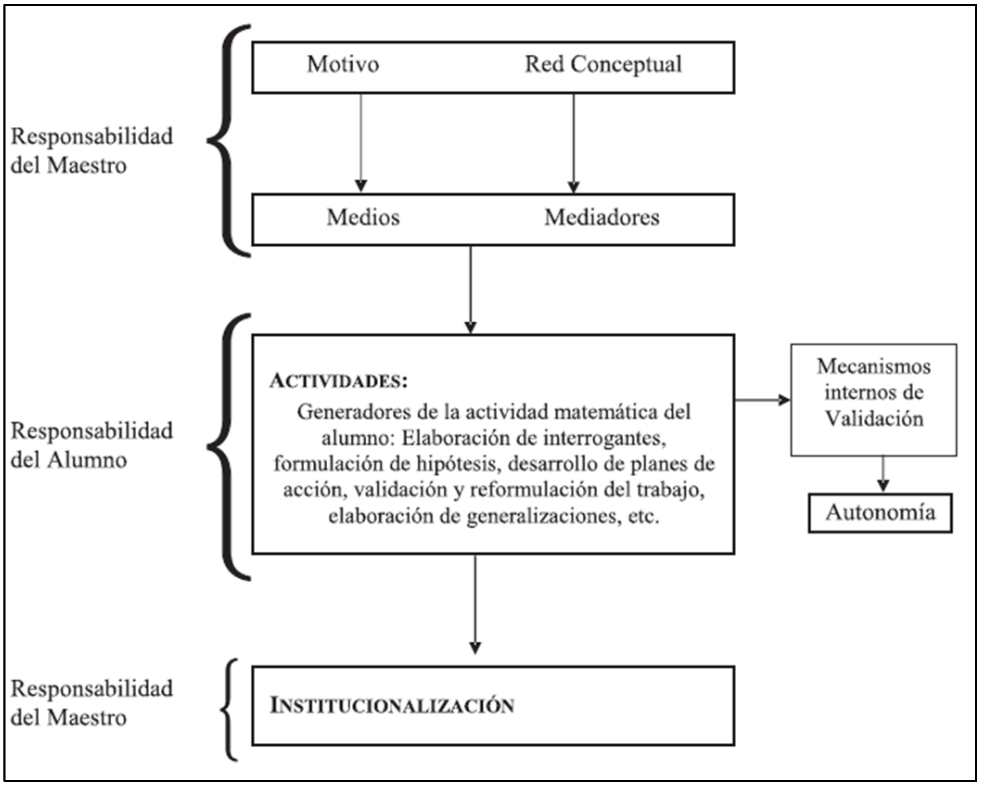


Figura 2. Esquema básico para el diseño de situaciones problema

El primer elemento, la red conceptual, que es responsabilidad del profesor, es una organización jerárquica y estructurada del conocimiento, encargada de que el proceso de exploración y sistematización genere cada vez más significados entre los conceptos y las relaciones que se establecen entre estos no se agoten de inmediato (Obando y Múnera, 2003).

> Se entiende por red conceptual una especie de malla donde los nudos son el centro de las distintas relaciones existentes entre los conceptos asociados a los conocimientos que la situación permite trabajar (…). La red conceptual se constituye en el elemento básico de la situación problema, en tanto que ésta permite tomar decisiones sobre los medios y mediadores, y del tipo de actividad que se debe proponer al estudiante, de tal forma que se logre concordancia entre las relaciones estructurales lógicomatemáticas que se

establecen en la situación y los aspectos conceptuales de la red que se espera aprendan los alumnos (Obando y Múnera, 2003, p.189).

La actividad matemática del estudiante en el aula, mediada por las situaciones problema, dan vida a los conceptos matemáticos que necesita aprender. Por tal motivo, a fin propiciar una verdadera actividad científica en el alumno, el diseño de una situación problema, obliga a los docentes de matemáticas a llevar a cabo una reelaboración didáctica, es decir, tomar decisiones en términos de forma o de los elementos conceptuales pertinentes para las circunstancias del momento. Pero en esta reelaboración didáctica, juegan un papel muy importante, los medios y los mediadores, al igual que el motivo, elementos que deben constituir el contexto significativo de la situación problema, que permita a los estudiantes analizarla con argumentos matemáticos. El motivo, que puede ser un suceso, un motivo, una oportunidad, entre otros (por ejemplo, la estatura de un niño), determina en gran medida las posibilidades de comprensión de la situación por parte de los estudiantes, y por ende, se constituya en un verdadero problema significativo que implique la abstracción matemática. De otra parte, los soportes materiales manipulables por los alumnos, tales como juegos (diseñados con fines específicos), materiales (solidos geométricos,), instrumentos (calculadoras, softwares), entre otros, son los medios sobre los cuales se estructura la situación problema, con la intención de que estos se conviertan en mediadores, para lograr la actividad matemática del alumno (Obando y Múnera, 2003).

A través de las tareas que conforman la situación problema, diseñada a partir del análisis del profesor sobre la red conceptual, los medios y los mediadores, el estudiante desarrolla su actividad matemática y, por consiguiente, realiza las elaboraciones conceptuales relativas a los problemas que enfrenta. Pero, para que una situación cumpla con el papel de lograr el aprendizaje de los nuevos conceptos, ésta debe ser asumida por el estudiante, en lo que

Brousseau (como se citó en Obando y Múnera, 2003) llamó devolución de la situación, ya que a través de ella, se logra que el alumno sea consciente del trabajo que realiza y, por tanto su actividad matemática sea significativa. Por consiguiente, en las actividades, que son responsabilidad del alumno, algunos generadores de su actividad matemática, son: elaboración de interrogantes, formulación de hipótesis, desarrollo de planes de acción, elaboración de generalizaciones y validación y reformulación del trabajo. Este último generador, permite autonomía en el trabajo del estudiante, y por ende, desarrollar los cambios de estrategia que sean necesarios en la situación. Al comparar los mecanismos de validación, desde una perspectiva tradicional y a partir de la estrategia de las situaciones problema, en la primera, el trabajo del alumno debe ser validado desde formas externas (profesor, compañeros avanzados, libros de texto, etc.), mientras que el desarrollo de la situación, tiene implícitos mecanismos de evaluación o de validación del trabajo, es decir, el estudiante tiene herramientas que le permiten una confrontación clara de lo realizado con lo esperado, y por ende llevar a cabo planes de acción, que le permitan continuar con su trabajo (Obando y Múnera, 2003).

El último elemento básico de la situación problema, es la evaluación, y desde esta perspectiva, se realiza dentro de las mismas situaciones problemas diseñadas, teniendo en cuenta que, las aproximaciones a las soluciones (no respuestas) acertadas o con errores, son canalizadoras de aprendizaje y, al mismo tiempo, son el soporte de los procesos de la actividad matemática del estudiante. En este sentido, la evaluación respeta los ritmos de aprendizaje y pone de manifiesto que el profesor debe prestar atención a la actividad matemática de los estudiantes, donde los errores presentes en las respuestas, se deben canalizar como agentes mediadores que provoquen cambios conceptuales en los alumnos (Obando y Múnera, 2003).

Finalmente, el trabajo de aula a partir de las situaciones problema, requiere de un elemento fundamental, la institucionalización, que debe darse sobre la base del trabajo realizado por los estudiantes, y de la red conceptual que sustenta la situación problema. Obando y Múnera (2003), plantean que:

> (…) en la institucionalización el profesor organiza, sistematiza, da cuerpo y estructura a los objetos matemáticos que se quería fueran objeto de aprendizaje en los alumnos a través de las situaciones problema. En este momento, el maestro retoma la responsabilidad del trabajo, pues debe organizar de manera clara los objetivos de conocimiento matemático presentes en la situación y así, ayudar a los estudiantes a organizar los esquemas generales de pensamiento a través de los cuales estructura su conocimiento (p.197).

Los procesos algebraicos, son un eje fundamental en el desarrollo del pensamiento variacional, donde el punto de partida no es la sintaxis propia de las expresiones algebraicas, sino, que desde un contexto de variación y cambio, las diversas situaciones posibilitan expresar la generalización, que se puede lograr a través de las interrelaciones entre los lenguajes verbal, icónico, grafico, y simbólico. La figura 3, representa un esquema para la planeación de situaciones problema, que contribuyen a la movilización del pensamiento variacional, a partir de la orientación conceptual asumida desde los procesos algebraicos y analíticos (Posada, 2005).

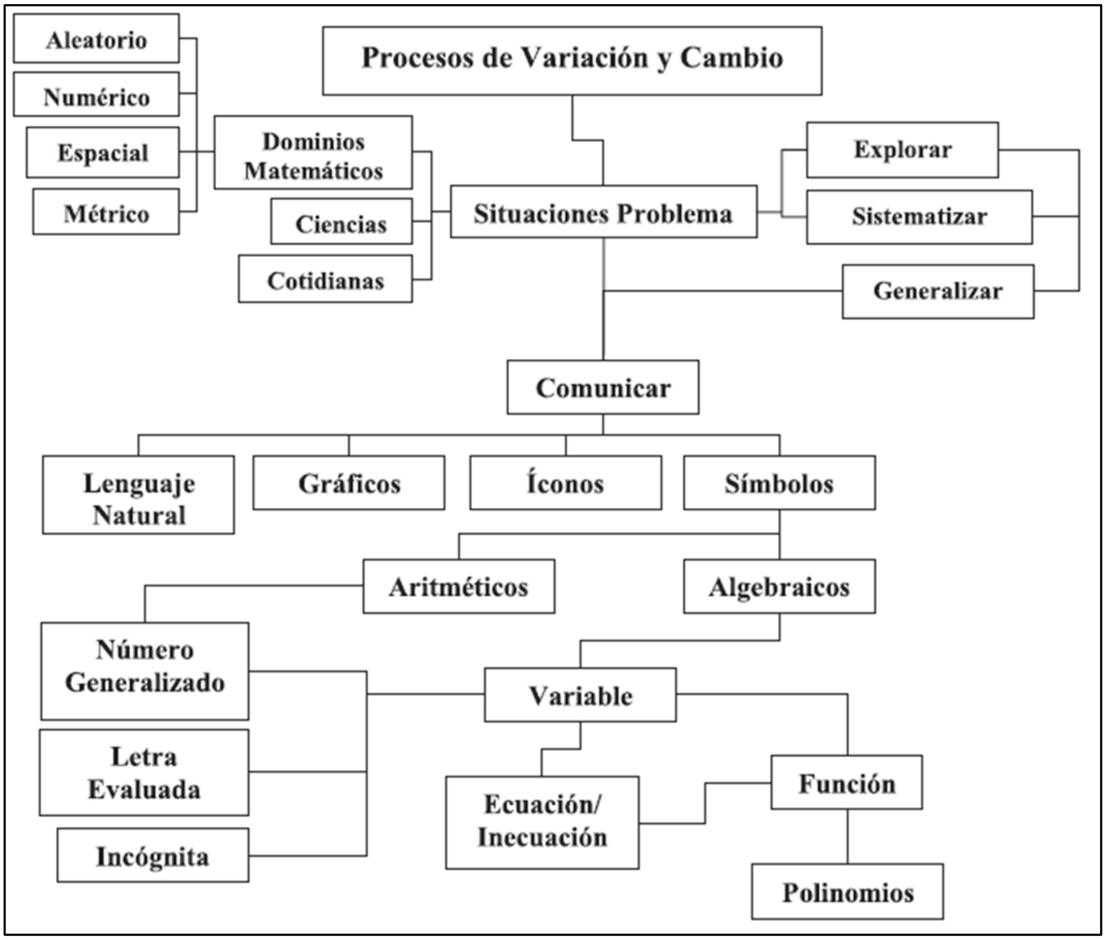


Figura 3. Esquema de planeación de las situaciones problema, desde los procesos algebraicos y analíticos, según Posada (2005).

3.5 La comprensión del concepto de función, a partir de los registros de representación semiótica

Teniendo en cuenta el esquema anterior, la actividad matemática referente al concepto de función, se realiza a partir de situaciones problema, dadas desde los procesos de variación y de cambio, que comunican distintos sistemas de representan tales como: icónico, grafico, simbólico y lenguaje natural.

Según Duval (2006), la actividad matemática se realiza en contextos de representación, que necesariamente deben ser semióticos, para que los estudiantes, tengan la capacidad de reconocer y usar el mismo objeto matemático de conocimiento en otros contextos de representación. Entre los diversos registros de representación, se construye una coordinación interna, que permiten la comprensión y el aprendizaje de las matemáticas.

El concepto de función lineal y afín, relaciona una gran variedad de representaciones (como son la representación gráfica, la expresión algebraica, la tabular, lengua natural), éstas son muy mencionadas tanto en los materiales de apoyo para el profesor (referentes teóricos) y en los textos utilizados por el docente y el estudiante al abordar este concepto matemático.

La adquisición de este concepto matemático y los problemas de su aprendizaje, se realizan a partir de las representaciones semióticas, que son relativas a un sistema particular de signos, tales como el lenguaje, la escritura algebraica o los gráficos cartesianos, y que pueden ser transformadas en representaciones equivalentes en otro sistema semiótico, a partir de la operación cognitiva de conversión de los contenidos de las representaciones iniciales (Duval, 1999).

En toda representación, los sistemas semióticos, han de permitir que se cumplan tres actividades cognitivas: La formación, el tratamiento y la conversión. La formación de representaciones en un registro semiótico particular, ya sea para expresar una representación mental o para evocar un objeto real, implica una selección en el conjunto caracteres y de las determinaciones que constituyen lo que se quiere representar. Las otras dos actividades, están ligadas a su transformabilidad en otras representaciones, que conservan todo el contenido de la representación inicial o solo una parte de ese contenido. Si la transformación produce otra representación en el mismo registro, se dice que es un tratamiento, pero cuando la transformación produce una representación en un registro distinto al de la representación inicial, es decir, se cambia de registro, se dice que es una conversión. Es decir, la transformación de la representación interna a un registro de representación se refiere a un tratamiento, la actividad de conversión es una transformación de la representación de un objeto en un registro inicial en otra representación del mismo objeto en un registro final, teniendo en cuenta que la característica de conservar la referencia al mismo objeto (objeto en el sentido estricto, situación…), pero sin conservar la explicitación de las mismas propiedades de ese objeto. La distinción de estas tres actividades cognitivas fundamentales de la representación, son esenciales, para el análisis cognitivo de las tareas de comprensión que se requieren en la enseñanza. Pero la enseñanza, privilegia el aprendizaje de las reglas que conciernen a las dos primeras actividades cognitivas, la formación de las representaciones y su tratamiento, mientras que la conversión de las representaciones de un registro a otro es mínimo o casi nulo, por las siguientes razones: La inexistencia de reglas de conversión, cambio de registro con fines de simplicidad y economía de tratamiento, y la creencia en la inmediatez y la simplicidad de un cambio de registro. Finalmente, el tratamiento y la conversión, son dos actividades independientes de problemas de aprendizaje de los estudiantes, donde la conversión es un proceso más complejo, que puede ser considerada el umbral de la comprensión (Duval, 1999).

Con frecuencia, muchas de las actividades que se proponen a los estudiantes para propiciar el aprendizaje del concepto de función lineal, es cambiar de registro de representación, por ejemplo, a partir de la expresión algebraica $y = f(x) = 2x + 4$, obtener su representación gráfica. Pero esa actividad cognitiva de conversión de la representación, no ocurre de forma inmediata y simple en todos los estudiantes, ocasiona obstáculos de aprendizaje del concepto, que se pueden evitar, a partir de la coordinación entre los diferentes registros de representación. La figura 4, muestra la representación gráfica de la función del ejemplo anterior.

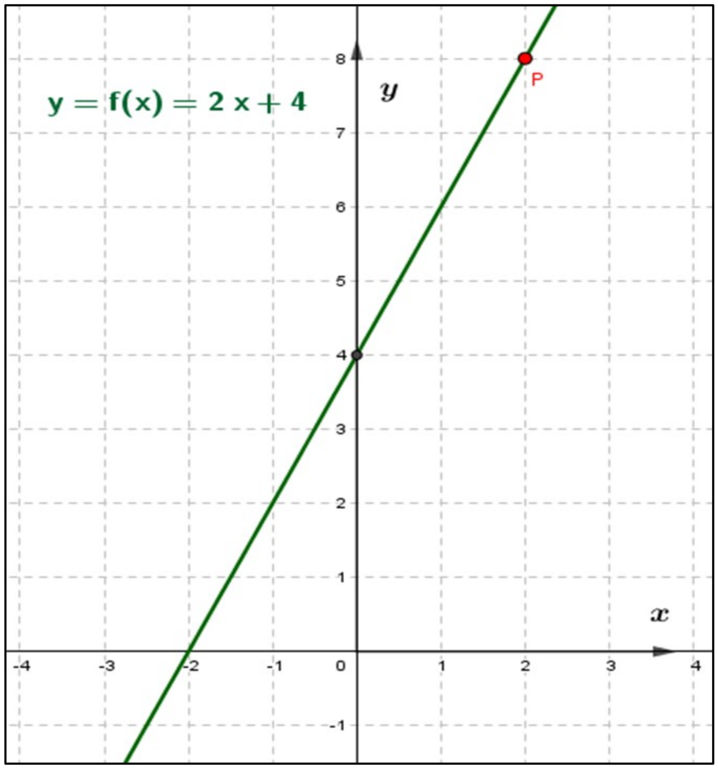


Figura 4. Representación gráfica de la función $y = f(x) = 2x + 4$

La representación gráfica, es una línea recta que representa la función $y = f(x) = 2x + 4$, que contiene cualquier punto de la forma (x_i, y_i), tal que $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k = 2$ y la ordenada en el origen $b = 4$, características o condiciones, que permiten verificar una correspondencia entre las dos representaciones establecidas, y realizar la conversión inversa, que permite determinar la expresión inicial. La utilización de la expresión algebraica para trazar la representación gráfica de la función, permite hacer lectura de pares ordenados de números, porque sus características visuales son numéricas, pero no puede llevar a notar las características visuales cualitativas y globales, que corresponden a las características de la ecuación algebraica convertida. La figura 5, representa una tarea de conversión entre la representación gráfica y la expresión algebraica (Duval, 2006).

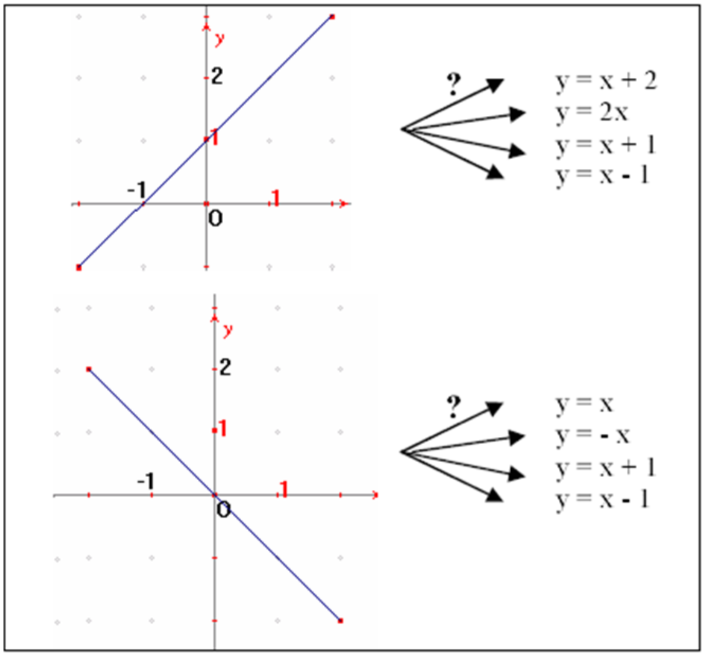


Figura 5. Tarea de reconocimiento cualitativo, para la conversión entre la representación gráfica y la expresión algebraica.

En palabras de este autor, cuando los estudiantes se enfrentan con este tipo de tareas, que son de reconocimiento cualitativo, la mayoría no pueden responder a la discriminación que se les pide, puesto que su actividad de conversión entre los registros, está relacionado mediante la práctica del trazado y lectura de los valores numéricos de las gráficas. Entonces, surge la siguiente pregunta: ¿Cómo ver las características semánticas de una ecuación a través de las características visuales cualitativas de una gráfica dibujada y viceversa? La solución a este interrogante, es utilizar la ley básica de funcionamiento semiótico que se refiere, que dentro de un sistema semiótico, el significado de toda representación toma valor en oposición a otra representación, dentro del mismo sistema. Las características semánticas de una ecuación a través de las características visuales cualitativas de una gráfica dibujada y viceversa, son matemáticamente importantes para la conversión. La figura 6, representa la red para las características visuales que son matemáticamente relevantes dentro una conversión entre gráficas y ecuaciones (Duval, 2006).

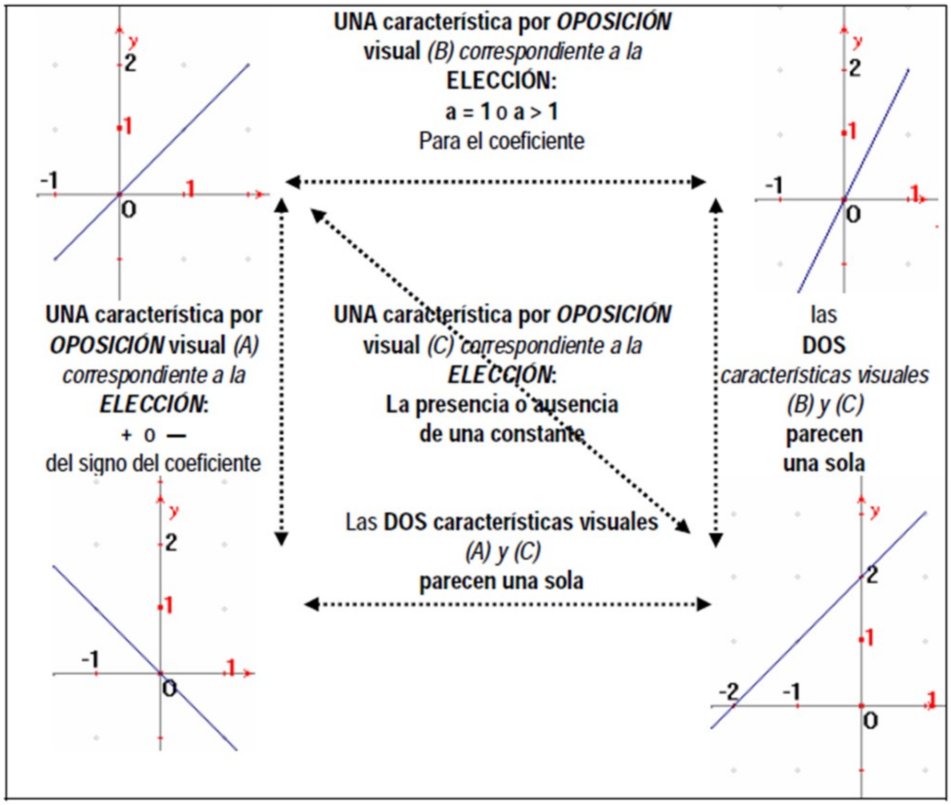


Figura 6. Red de discriminaciones cognitivas requeridas para una conversión entre gráficas y ecuaciones.

En el ejemplo anterior, si los estudiantes, realizan la conversión, desde la representación de partida (algebraica) a la representación de llegada (gráfica) y viceversa, teniendo en cuenta la red de discriminantes cognitivas requeridas, existe una congruencia entre las dos representaciones. Duval (1999), afirma "Dos representaciones son congruentes cuando hay correspondencia semántica entre sus unidades significantes, univocidad semántica terminal y el mismo orden posible de aprehensión de estas unidades en las dos representaciones" (p.53).

Si los estudiantes no realizan el cambio de registro, o presentan dificultad de conversión de una representación a otra, es porque existe la no-congruencia entre dos representaciones, a pesar de que los aprendizajes hayan requerido actividades de tratamientos en los diferentes registros de representación. Las dificultades debidas a la no-congruencia, se expresan con fracasos en las tareas que requieren una conversión del contenido de las representaciones, y revelan el fenómeno de encapsulamiento de los registros de representación. Si se tiene en cuenta el ejemplo de la función anterior, la conversión de la expresión algebraica o ecuación hacia la gráfica, no tiene dificultades, mientras que si se realiza la conversión inversa de la representación gráfica hacia la ecuación, los estudiantes, presentan dificultad, ya que las unidades significantes de la línea recta, están determinadas por los valores de diferentes variables visuales, que permiten realizar una lectura correcta de la gráfica (Duval, 1999).

En palabras de Duval (2006), la actividad matemática debe satisfacer dos requisitos conflictivos, con los que tropieza la mayoría de los estudiantes: Las representaciones semióticas deben ser usadas necesariamente, incluso si se escoge el tipo de ellas, y los objetos matemáticos representados, nunca deben confundirse con el contenido de las representaciones semióticas utilizadas. Estos requisitos, suscitan un profundo problema, que es específico del aprendizaje de las matemáticas, siendo así, la conversión de la representación, el umbral de la comprensión.

Es por eso, que una condición necesaria para la comprensión del concepto de función, es la coordinación interna de los diferentes registros de representación, que están ligados a la objetivación o al tratamiento del concepto y a la conversión de las representaciones. Cuando la adquisición del conocimiento está ligada a la formación y al tratamiento de representaciones realizadas en un solo registro, o se privilegia un registro particular (tabla de valores, gráfica, ecuación, entre otros), esta adquisición queda limitada a ese único registro, evidenciando, casi siempre, que los aprendizajes se quedan mono-registro, que no excluyen el desarrollo de alguna forma de comprensión de los estudiantes, pero que en su mayoría, muestran incapacidad de movilizar los conocimientos adquiridos por fuera del contexto donde se realizó el aprendizaje. En este sentido, una comprensión mono-registro es una comprensión que no permite posibilidades de transferencia, es por eso que es necesario, un aprendizaje particularmente centrado en la conversión de las representaciones, donde la coordinación de los registros de representación en los estudiantes, no es suficiente con ejercicios de conversión, es preciso, que movilicen varios registros simultanea o sucesivamente, para lo cual, es necesario tener en cuenta los fenómenos de no-congruencia y, que la conversión de las representaciones requiere de la discriminación de las unidades significantes que se deben poner en correspondencia en el registro de partida y en el de llegada. La discriminación de las unidades significantes que componen una representación tales como un enunciado, una formula o un texto (no aparecen separadas e independientes unas de otras), son una condición necesaria para la actividad de conversión, y para la coordinación interna propias de cada registro (Duval, 1999).

Siguiendo con las ideas de este autor, la actividad de conversión, requiere de tareas que contengan dos dimensiones semánticas, tomando como variable independiente, la variación del contenido visual del registro inicial. Este tipo de tarea es de comparación, trata de determinar lo que podría cambiar en las representaciones del registro final cuando se modifica una representación del inicial. La figura 7, muestra un ejemplo de tarea que permite la comprensión de los estudiantes, respecto al concepto de función lineal y afín:

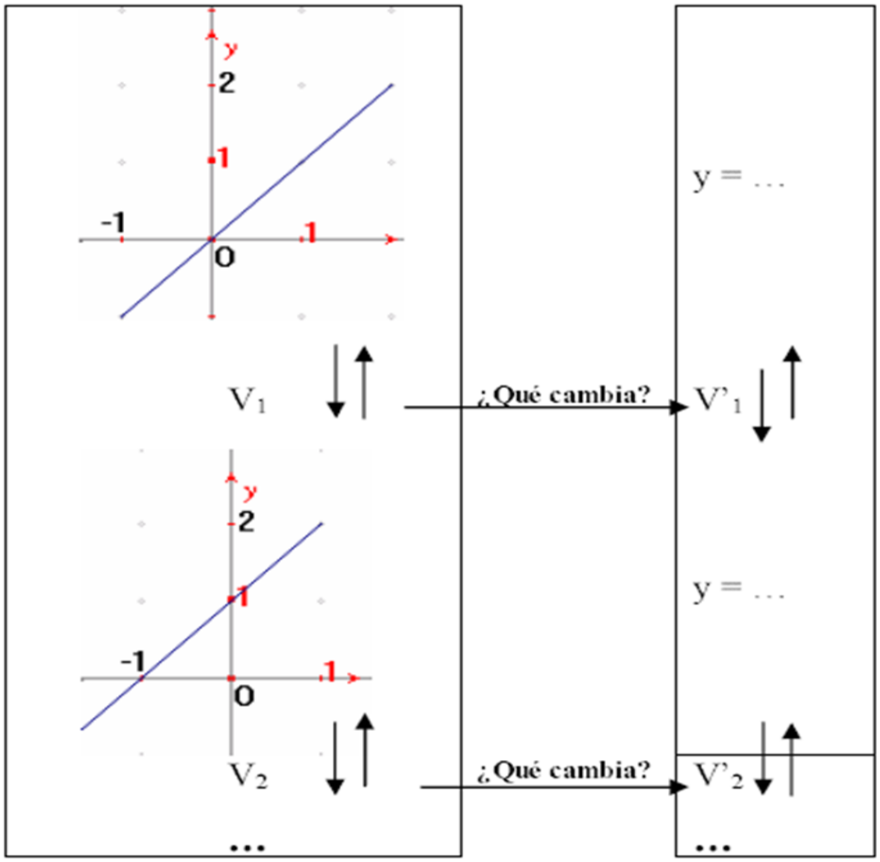


Figura 7. Tarea de comparación para analizar los vínculos entre las posibles variaciones del contenido de la representación de dos registros puestos en correspondencia, según Duval (2006).

Este tipo de tarea, posibilita una verdadera exploración de las variaciones visuales de las características de los distintos registros de representación, y permite que los estudiantes realicen su coordinación interna, que se refiere a cambiar de registro y controlar su pertinencia, lo que conlleva a que accedan a una verdadera comprensión conceptual (Duval, 2006).

3.5.1 Los distintos sistemas semióticos de representación del concepto de función lineal y afín

A partir del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, la función lineal y afín, es un modelo de la variación lineal entre dos magnitudes, que varían en relación de dependencia, donde los incrementos en los valores de la variable independiente, están en proporción constante con los con los incrementos de la variable dependiente (Valoyes y Malagón, 2004).

Janvier (como se citó en Azcárate y Deulofeu, 1990), muestra la variedad de todas las posibles traducciones en el aprendizaje de las funciones (ver tabla 3). Partiendo de la idea de función como expresión de dependencia entre variables, la caracterización de las actividades relativas a ella, permite obtener una visión general del carácter de la misma.

Tabla 3. Posibles traducciones de las funciones, según Janvier (como se citó en Azcárate y Deulofeu, 1990)

Desde - hacia	Descripción verbal	Tabla	Gráfica	Fórmula
Descripción verbal	-	Medida	Boceto	Modelo
Tabla	Lectura	-	Trazado	Ajuste
Gráfica	Interpretación	Lectura	-	Ajuste
Fórmula	Interpretación	Computo	Gráfica	-

Los registros semióticos de representación que se tuvieron en cuenta para este trabajo de investigación, son: registro de representación en lengua natural, registro de representación grafico cartesiano, registro de representación tabular o numérica, y el registro de representación algebraico o simbólico.

A continuación, se realiza un análisis de cada uno de los registros semióticos de representación, mencionado anteriormente.

3.5.1.1 El registro grafico

> En matemáticas, los gráficos cartesianos, se utilizan siempre en articulación con otro registro de representación y, además, deben permitir tratamientos cualitativos propios a este modo de visualización: interpolación, extrapolación… Llamaremos a esta tercera manera de ver, "aprehensión global cualitativa" (…) Uno de los problemas específicos del aprendizaje es hacer pasar a los alumnos de una aprehensión local e icónica a una aprehensión global cualitativa. Solo con este tipo de aprehensión es que puede haber coordinación con el registro de la escritura algebraica de relación y que los gráficos cartesianos pueden funcionar como una visualización (Duval, 2001, p.66)

Los objetos del registro semiótico de representación gráfica, son los ejes ortogonales, los puntos de la forma $P\ (x, y)$, donde y tiene la relación $y = f(x)$, y la línea recta que pasa por esos puntos.

> Las unidades significantes en el registro de los gráficos están determinadas por ocho valores visuales que corresponden a la asociación de tres variables visualmente pertinentes para el registro de los gráficos cartesianos: el sentido de inclinación de la recta, la posición de su intersección con el eje de las ordenadas, y su posición en relación con un reparto simétrico de los dos cuadrantes opuestos (Duval, 1999, p.79)

De acuerdo a la teoría de este autor, la siguiente tabla registra las variables y unidades significantes para las funciones lineal y afín, en el registro gráfico.

Tabla 4. Variables y unidades significantes, según Duval (1999)

Variables	Unidades significantes
El sentido de inclinación de la recta	El trazo sube de izquierda a derecha. El trazo desciende de izquierda a derecha.
La posición de su intersección con el eje de las ordenadas	Comporta tres valores: Corte por encima, en el origen, por debajo.
La posición en relación con un reparto simétrico de los dos cuadrantes opuestos	El ángulo partiendo del eje x, es más pequeño, igual o mayor que el ángulo complementario.

Los valores de la segunda variable, determinan el carácter de valores positivo, negativo o nulo, de la constante de proporcionalidad en la escritura algebraica de la función, mientras que la amplitud de los ángulos en la tercera variable, determinan el hecho de que el coeficiente en la expresión algebraica de la función, sea $> 1, = 1\ o\ < 1$ (Duval, 1999)

La figura 8, representa la forma gráfica del modelo de función lineal $y = f(x) = kx$, que es una línea recta, que contiene el origen de coordenadas y cualquier punto de la función de la forma (x_i, y_i), tal que $\frac{y_i}{x_i} = k$, se llama constante de proporcionalidad, recibe el nombre de pendiente de la recta, y representa la tangente del ángulo que forma la recta con el eje horizontal (Azcárate y Deulofeu, 1990).

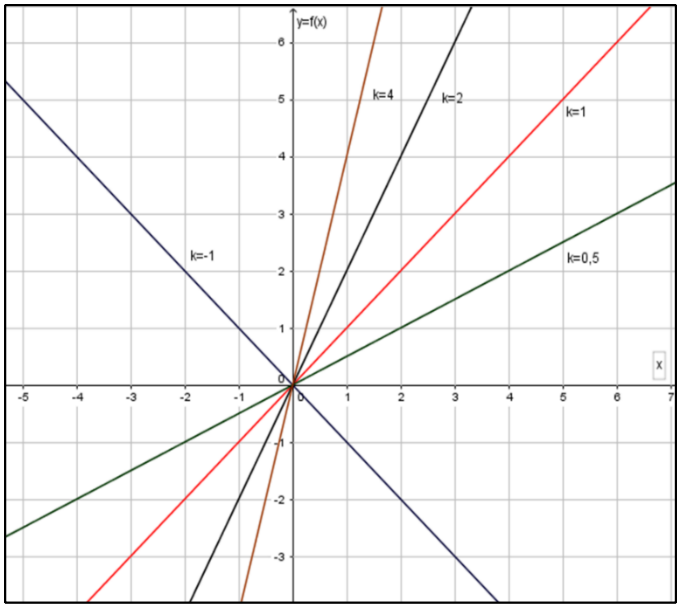


Figura 8. Representación gráfica de una función lineal

A partir de la función lineal, se obtiene un nuevo modelo de función, la función lineal afín, una función cuya gráfica es una recta cualquiera, que incluye la recta que pasa por el origen, pero que excluye las rectas paralélelas al eje de las ordenadas. Estas funciones, son una línea recta con ecuación $y = k.x + b$, donde k es la pendiente de la recta y b la ordenada en el origen. La constante k, es el parámetro que representa el desplazamiento o traslación en sentido vertical de la recta asociada $y = k.x$ (Azcárate y Deulofeu, 1990).

En este caso, los incrementos en la variable independiente están en proporción constante con los incrementos en la variable dependiente, siendo k, la constante de proporcionalidad, que ya no funciona como un operador multiplicativo, es decir, para cualquier punto de la función de la forma (x_i, y_i), $\frac{y_i}{x_i} \neq k$, la función $y = k.x$, se ha desplazado b unidades hacia arriba o hacia abajo (Valoyes y Malagón, 2004).

La figura 9, muestra la representación gráfica de una función lineal afín, que tiene por modelo de función, la expresión algebraica $y = f(x) = k.x + b$

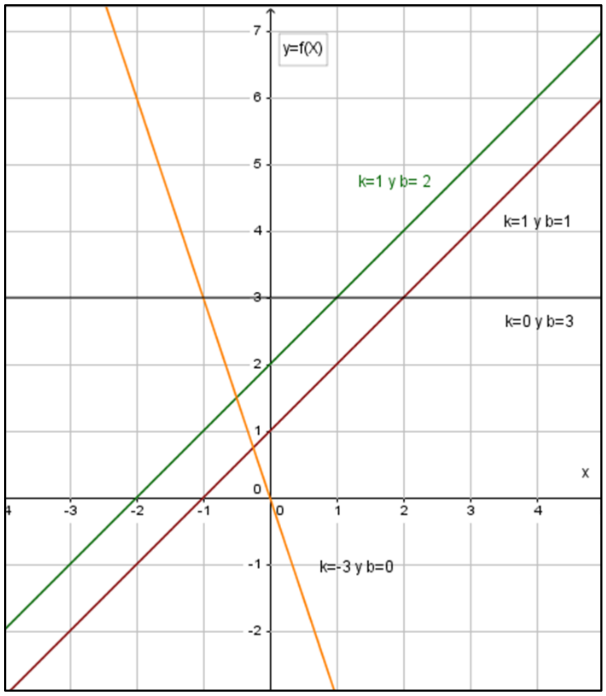
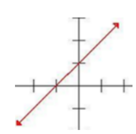
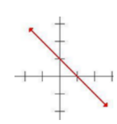
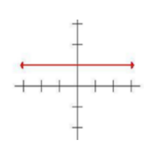


Figura 9. Representación gráfica de una función de la forma $y = f(x) = kx + b$

En la tabla 5, se muestran las distintas representaciones gráficas de las funciones lineal afín, de acuerdo al valor de la constante de proporcionalidad.

Tabla 5. Características de una función lineal afín, de acuerdo al valor de la pendiente

Casos	Clase de línea recta	Valor de k	Tipo de grafica
1	Creciente	$k > 0$	
2	Decreciente	$k < 0$	
3	Constante	$k = 0$	

3.5.1.2 El registro tabular o numérico

Los objetos del registro de representación tabular, son un arreglo rectangular de filas y columnas, que contiene parejas de números que lo componen. Esas parejas de números pueden estar escritas como razones o como una regla de correspondencia entre cada pareja ordenada, de la forma $(x, f(x))$. En este registro, se realizan actividades de tratamientos propios cualitativos a la interpolación, la extrapolación y el cambio de un incremento, esto, es $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$. Las unidades significantes de este registro, son las magnitudes de cada una de las situaciones, que se asocian con una fila o columna, para establecer las siguientes unidades: Δx representa el incremento en la primera fila o columna, de igual forma, Δy representa el incremento en la segunda fila o columna. La razón entre Δy y Δx, representa la razón de cambio, y los puntos (x, 0) y (0, y), representan los puntos de corte con el eje x y el eje y, respectivamente.

La tabla de valores, ofrece una visión cuantitativa, que se interpreta de la correspondencia entre dos variables, donde se pueden identificar pares de valores $(x, y = f(x))$ de la función de forma parcial. La gráfica y la formula, lenguajes de mayor abstracción y más difíciles de interpretar, permiten obtener una visión general y completa de una función a estudiar, de forma cualitativa y cuantitativa, lo que proporciona una mayor y mejor información que posibilita la caracterización de modelos (Azcárate y Deulofeu, 1990).

La tabla 6, muestra un ejemplo de una relación de dependencia entre las magnitudes $\boldsymbol{y}$ (Costo (\$)), y $\boldsymbol{x}$ (cantidad de fotocopias)

Tabla 6. Costo de cierta cantidad de fotocopias

Cantidad de Fotocopias	2	4	6	8	10
Costo $	60	120	180	240	300

3.5.1.3 El registro simbólico o algebraico

Los objetos en el registro algebraico, son símbolos que pertenecen a nuestro alfabeto, en ocasiones al alfabeto griego, a los números, propiedades y relaciones en el conjunto de los números reales.

Las reglas de tratamiento de este registro de representación, son las relaciones y propiedades de las estructuras algebraicas, que permiten realizar una transformación en el registro inicial, para obtener uno equivalente, que será el registro final.

En relación a las unidades significantes, se les asocia un símbolo a cada cantidad magnitud, que se les llama variable. En este sentido, este sistema de representación contiene dos variables, que usualmente se denotan por x, a la variable independiente, y $y = f(x)$, a la variable dependiente.

En palabras de (Valoyes y Malagón, 2004), uno de los aspectos que caracteriza la función lineal, es el tipo de relación entre la variación de la magnitud dependiente y la independiente. Para la función $y = kx$, para dos valores de x_1, x_2, y los correspondientes valores kx_1 ,kx_2 $\in$ $y = f(x)$, se cumple que:

$$y_1 - y_2 = kx_1 - kx_2$$

$$y_1 - y_2 = k(x_1 - x_2)$$

$$\frac{y_1 - y_2}{(x_1 - x_2)} = k$$

En este caso, las variables x y y tienen una relación de variación proporcional directa, que implica la constante de proporcionalidad k, que va a funcionar como un operador multiplicativo. De igual forma, para $y = kx + b$, se cumple que:

$$y_1 - y_2 = (kx_1 + b) - (kx_2 + b)$$

$$y_1 - y_2 = kx_1 + b - kx_2 - b$$

$$y_1 - y_2 = kx_1 - kx_2$$

$$y_1 - y_2 = k(x_1 - x_2)$$

$$\frac{y_1 - y_2}{(x_1 - x_2)} = k$$

En este caso, aunque los incrementos en la variable independiente, están en proporción constante con los incrementos en la variable dependiente, siendo k, la constante de proporcionalidad, esta, ya no funciona como un operador multiplicativo, dado al factor aditivo $+b$, que representa una de las invariantes de la función.

La siguiente tabla, muestra las variables y unidades significantes del registro simbólico.

Tabla 7. Variables y unidades significantes, según Duval (1999)

Variables	Unidades significantes
k	$k = 0$ $k < 1$ $k > 1$ $k = 1$
b	$b = 0$ $b < 0$ $b > 0$

3.5.1.4 El registro verbal o de lengua natural

El registro semiótico de lengua natural, como un registro discursivo, permite describir, inferir, razonar. En matemáticas, su utilización, puede proceder de diferentes tipos de actividad cognitiva, por ejemplo, puede ser utilizado con fines de tratamiento en las demostraciones en geometría, pero igualmente, es utilizado con fines de descripción o de explicación en relación con representaciones de otro registro. De igual forma, en la enseñanza, las actividades de conversión que implican este registro de representación, toman gran relevancia, por su importancia de los enunciados de los problemas, y por la importancia de los cambios orales, que permite exigencias de control y precisión que solo la expresión permite (Duval, 2001).

Cada una de las formas de representación semiótica de la función lineal y afin, dimensiona su aspecto dinámico o estático. De acuerdo con Valoyes y Malagón (2004),

> La representación gráfica cartesiana globaliza, permite encontrar características puntuales y dinámicas de la función (crecimiento, continuidad); en los enunciados verbales se muestra también una concepción dinámica, pues define las variaciones entre magnitudes físicas o cantidades. Por su parte la representación algebraica ofrece la posibilidad de atender a las dos concepciones: cuando se asume como fórmula, medio para calcular la variable dependiente a partir de la independiente, se tiene la concepción dinámica; cuando la representación algebraica se asume como $y = f(x)$ sin referencia a los elementos, se tiene la concepción estática (p.59).

4. Diseño de las situaciones problema

La propuesta de aula, está conformada por cuatro situaciones problema, de las cuales, el diseño de las tres primeras, se resuelven utilizando lápiz y papel, y se diseñaron a partir de problemas de la cotidianidad o de otras disciplinas, lo cual pone de manifiesto a las matemáticas como una actividad humana, accesible para todos, es decir, las matemáticas como un constructo social, donde el estudiante al interactuar entre ellos mismos, y con el profesor, a través de un objeto de conocimiento, generan procesos que lo conducen a la construcción del concepto de función lineal y afín. Del mismo modo, el diseño de la última situación problema, parte desde un contexto propio de las matemáticas, donde a partir de un recurso del software educativo GeoGebra, se plantean dos tareas que contienen siete y diez preguntas respectivamente, donde el registro de representación inicial de la función lineal y afín, es la representación gráfica, que contiene deslizadores para la constante de proporcionalidad y para la invariante b. Esta última situación, permitirá avanzar en la complejidad conceptual de esta clase de funciones, propuesto en el diseño del aula.

Cada una de las situaciones, contiene tareas que implican los registros de representación semiótica planteados en el marco teórico, y pretende que los estudiantes reconozcan los objetos que los conforman, las transformaciones que se están realizando entre ellos, las unidades significantes (si es necesario), en la conversión de un registro a otro, y los modelos matemáticos que de estas se derivan.

Para cada una de las situaciones, se realiza una descripción general de su intencionalidad, es decir, en el desarrollo de cada una de las tareas, los estudiantes desarrollan su actividad matemática referente al concepto de función lineal y afín, a partir de situaciones problemas que implican un modelo que se obtiene mediante la transformación de los diferentes registros semióticos de representación. Para cada una de las preguntas de cada tarea de cada situación problema, se realizan tablas que van acompañadas de su respectiva pregunta, los contenidos, el desempeño esperado (intencionalidad) en los estudiantes y el tipo de transformación que se espera que realicen los estudiantes en el registro de representación semiótica inicial. Los títulos de las tablas, corresponden con la tarea y la situación, así, $\mathrm{T_1S_1}$, hace referencia a tarea 1 y situación 1, esto, con el fin de contrastar los resultados de la investigación.

4.1 Situación problema 1: Magnitudes directamente proporcionales

La primera situación, hace referencia a la variación de magnitudes que son directamente proporcionales, donde, a partir de dos tareas que la conforman, se hace énfasis en el reconocimiento de la relación proporcional directa que varían las magnitudes, a partir de distintos registros de representación: lenguaje verbal, tabular y gráfica. En los incrementos de los valores de una variable (variable dependiente), con respecto a la otra variable (variable independiente), se empieza a caracterizar un aspecto importante del concepto de función lineal, la constante de proporcionalidad, y por ende el modelo de función $y = kx$.

La primera tarea está propuesta desde un lenguaje verbal, y cada una de las preguntas, conllevan a que el estudiante, realice actividad de tratamiento en un mismo sistema o conversión de un sistema de representación a otro. Al finalizar las tareas, la constante de proporcionalidad k, emerge como un operador multiplicativo, que le permite resolver cada una de las preguntas que la conforman. De igual forma, se tienen en cuenta las unidades significantes para la actividad de conversión entre dos registros de representación.

En la tarea 2, el registro inicial de partida, es la representación gráfica, y cada una de las preguntas, conllevan al estudiante al reconocimiento de las unidades significantes de la función lineal, que de acuerdo al marco teórico propuesto, son: constante de proporcionalidad (k), variables dependiente (y) e independiente (x), tipo de grafico (de acuerdo al valor de k), valores de la forma $(x, y = f(x))$, entre otros.

Propósitos: Favorecer a los estudiantes en el reconocimiento del modelo de función lineal $y = kx$, a partir de situaciones de variación y de cambio, dados desde distintos sistemas de representación semiótica.

Favorecer a los estudiantes en el tratamiento y la conversión de los diferentes registros de representación semiótica de una función lineal.

4.1.1 Tarea 1 – Situación 1

En grupos de tres estudiantes, responda las tareas 1y 2 de la situación problema 1, realizando los procedimientos correspondientes.

El costo ($) de las fotocopias, depende de su cantidad. Diez fotocopias cuestan $ 300. Responda las siguientes preguntas

1. ¿Qué magnitudes intervienen en el problema? ¿Cada cuánto aumenta el costo de las fotocopias?
2. ¿Cuál es la razón entre el costo ($), y el número de fotocopias $\left(\frac{costo\ (\$)}{numero\ de\ fotocopias}\right)$?
3. ¿Cuántas fotocopias corresponden a $ 480?
4. Complete los valores de la tabla 1.

Tabla 1. Costo de cierta cantidad de fotocopias

Numero de Fotocopias	2	4	6	8	10	12	14
Costo ($)					300		

5. ¿Cuál es el procedimiento para completar cada dato de la tabla?

6. Escriba las razones entre el costo ($), y el número de fotocopias de la tabla. ¿Qué valor se obtiene?, explique.

7. Es posible, ¿encontrar el costo de cualquier cantidad de fotocopias?, explique

8. Represente la tarea 1, en un plano cartesiano

La siguiente tabla, relaciona los desempeños y las representaciones esperadas en los estudiantes, cuando desarrollen la tarea 1 de la situación 1.

Tabla 8. Preguntas, contenidos, desempeños y tipos de representación esperados T_1S_1

Preguntas	Contenidos	Desempeños esperados	Tipo de representación
P_1	Variables dependientes e independientes Variación de magnitudes	Identifica cómo están variando dos magnitudes que son dependientes	Actividad de tratamiento en un registro verbal, para determinar la constante de proporcionalidad.
P_2 y P_6	Razones y proporciones Constante de proporcionalidad	Reconoce la constante de proporcionalidad entre dos magnitudes cambian de forma proporcional	Actividad de conversión desde un registro verbal, hacia un registro tabular, para determinar la constante de proporcionalidad del modelo de función $y = f(x) = kx$.
P_3	Constante de proporcionalidad	Calcula el costo, de cierta cantidad de fotocopias.	Actividad de conversión desde un registro verbal, hacia un registro tabular,

			para determinar la cantidad de fotocopias que le corresponden a cierto valor.
P_4	Representación tabular de una función lineal.	Completa los valores de la tabla, a partir de la constante de proporcionalidad	Tratamiento en el lenguaje tabular, a partir del algoritmo de la multiplicación entre números reales.
P_5	Constante de proporcionalidad	Explica el procedimiento para determinar los valores de la función costo	Tratamiento de en el registro verbal, para explicar el procedimiento de cálculo de los valores de la función costo.
P_7	Representación tabular o algebraica de una función	Explica el procedimiento para determinar el costo de cualquier cantidad de fotocopias.	Tratamiento en el registro verbal, para explicar la forma de calcular la función costo para cierta cantidad de fotocopias.
P_8	Representación gráfica de una función	Representa la gráfica de una función, utilizando el modelo matemático $y = f(x) = kx$.	Conversión desde un registro verbal hacia un registro gráfico, para determinar el tipo de trazo de la línea recta en el plano cartesiano.

4.1.2 Tarea 2 – Situación 1.

La distancia recorrida por un vehículo, depende de su cantidad (tiempo). La figura 1, muestra la distancia recorrida por un automóvil cada vez que transcurre una hora.

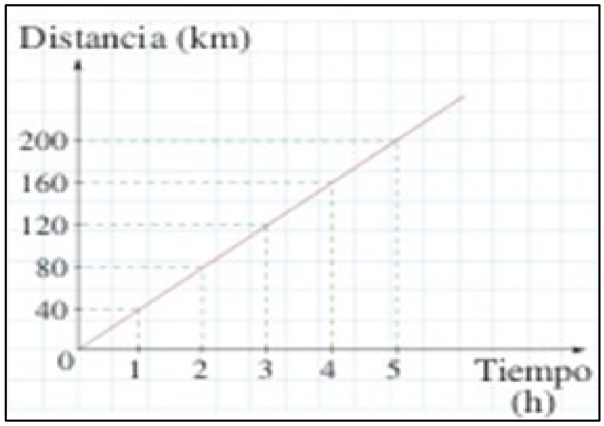


Figura 1. Distancia recorrida por un automóvil, durante varias horas.

Conteste cada una de las preguntas, de acuerdo a la figura 1.

1. ¿Qué magnitudes intervienen en el problema?
2. Escriba las razones, entre la distancia recorrida (km) y el tiempo (h). ¿Qué valor se obtiene?
3. Si la velocidad del automóvil es $v = \frac{distancia}{tiempo}$, ¿cuál es su velocidad?
4. ¿Cuál fue la distancia máxima recorrida por el automóvil? ¿Cuánto tiempo utiliza?
5. De acuerdo con la gráfica, complete los valores de la tabla 2:

Tabla 2. Distancia recorrida por un automóvil, de acuerdo a su tiempo

Tiempo (h)	0	1	2	3	4	5	6
Distancia (km)			80				

6. ¿Cuál es la distancia recorrida por el automóvil, transcurridas 10 y 15 h, respectivamente? Explique.
7. ¿Cuál sería la forma para calcular la distancia recorrida ($\boldsymbol{d}$) por el automóvil, para cualquier valor de tiempo $\boldsymbol{t}$ (h)?

La siguiente tabla, relaciona los desempeños y las representaciones esperadas en los estudiantes, cuando desarrollen la tarea 2 de la situación 1.

Tabla 9. Preguntas, contenidos, desempeños y tipos de representación esperados T_2S_1

Preguntas	Contenidos	Desempeños esperados	Tipo de representación
P_1	Variables dependientes e independientes Variación de magnitudes	Identifica cómo están variando dos magnitudes que son dependientes	Conversión desde un registro gráfico, hacia un registro verbal, para determinar las magnitudes que intervienen en la tarea.
P_2	Razones y proporciones. Constante de proporcionalid ad	Reconoce la constante de proporcionalidad entre dos magnitudes covariacionales.	Conversión desde un registro gráfico, hacia un registro numérico, para calcular la constante de proporcionalidad.
P_3	Razones y proporciones. Constante de proporcionalid ad	Reconoce la constante de proporcionalidad entre dos magnitudes covariacionales.	Conversión desde un registro verbal, a un registro tabular, para calcular la constante de proporcionalidad.
P_4	Registro gráfico de una función lineal	Calcula la distancia recorrida, de acuerdo al tiempo correspondiente.	Actividad de tratamiento en el registro gráfico, para determinar la función distancia, de acuerdo al tiempo que le corresponde.
P_5	Registro tabular de una función lineal	Completa los valores de la tabla, a partir de la constante de proporcionalidad.	Conversión desde el registro gráfico, hacia el registro tabular para determinar los valores de la forma $(x, y = f(x))$
P_6	Registro tabular de una función lineal	Calcula el valor de la función distancia, para los valores correspondientes.	Conversión desde el registro gráfico, hacia el registro numérico, para calcular el valor de la función distancia, para los valores correspondientes de tiempo, a partir de la extrapolación de datos.

P_7	Registro simbólico de una función lineal	Determina la ecuación que representa el modelo de función lineal $y = f(x) = kx$	Actividad de conversión desde el registro gráfico, hacia el registro simbólico, para calcular la función $y = f(x) = 40x$

4.2 Situación problema 2: Magnitudes proporcionales

La segunda situación, hace referencia a la variación de magnitudes que son proporcionales, donde, a partir de dos tareas que la conforman, se hace énfasis en el reconocimiento de la relación de magnitudes proporcionales, a partir de distintos registros de representación semiótico. En cada una de las tareas, se hace énfasis en la razón de cambio entre la variación de la variable dependiente y, y la variación de la variable independiente x, que termina siendo la constante de proporcionalidad, en el modelo de función $y = kx + b$. De igual forma, las tareas propuestas en esta situación, conllevan al estudiante al reconocimiento de invariantes, que le permiten ver en lo particular lo general.

La primera tarea está propuesta desde un lenguaje gráfico, y cada una de las preguntas, conllevan a que el estudiante, realice actividad de tratamiento en un mismo registro de representación o conversión de un registro de representación inicial a otro. Al finalizar las preguntas, se espera que los estudiantes determinan la constante de proporcionalidad k, como la razón de cambio entre el incremento de la variable dependiente y el incremento de la variable dependiente. De igual forma, se espera que se reconozca que el costo fijo, representa el valor de b en la función lineal afín.

En la tarea 2, el registro inicial de partida, es la representación simbólica o algebraica, y cada una de las preguntas, conllevan al estudiante a realizar actividades de tratamiento en un mismo registro de representación, o conversión de un registro de representación inicial a otro, de tal modo que reconozca las unidades significantes de la función lineal afín, que de acuerdo al marco teórico propuesto, son: constante de proporcionalidad (k), que se calcula como la razón entre el incremento de la variable independiente y el incremento de la variable dependiente, variables dependiente (y) e independiente (x), tipo de grafico (de acuerdo al valor de k), valores de la forma $(x, y = f(x))$, entre otros. Se espera con esta tarea, que los estudiantes realicen la conversión de registro, desde uno tabular, a uno de forma algebraico.

Propósitos: Favorecer a los estudiantes en el reconocimiento del modelo de función lineal $y = kx + b$, a partir de situaciones de variación y de cambio, dados desde distintos sistemas de representación semiótica.

Favorecer a los estudiantes en el tratamiento y la conversión de los diferentes registros de representación semiótica de una función lineal, de tal modo que reconozcan sus unidades significantes, a partir de los registros gráfico, tabular y algebraico.

4.2.1 Tarea 1 – situación 2

En grupos de tres estudiantes, responda las tareas 1y 2 de la situación problema 2, realizando los procedimientos correspondientes.

La figura 1, muestra la relación entre el consumo de agua en metros cúbicos (m^3) de varios hogares del municipio de Cali, y el costo ($) de dicho servicio.

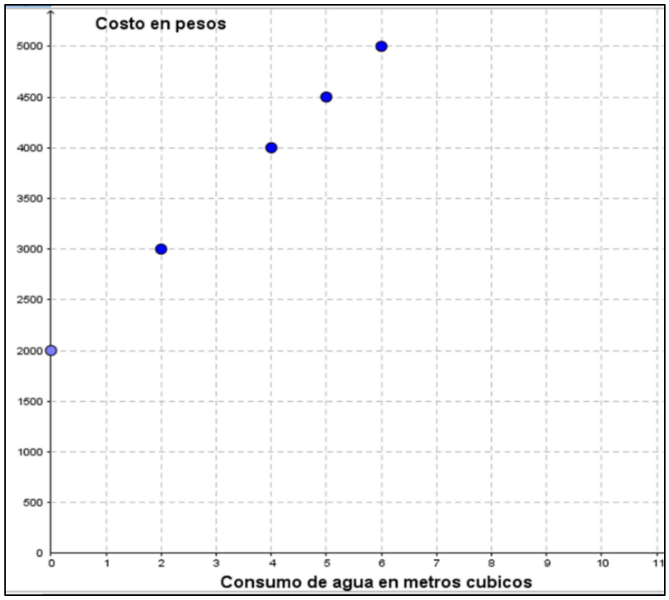


Figura 1**:** Costo ($) del consumo de agua en metros cúbicos.

Conteste cada una de las preguntas, de acuerdo a la figura 1.

1. ¿Cuánto le toco pagar al que más agua gastó?

2. Al hogar que no gastó agua, ¿Cuánto le tocó pagar?

3. Escriba las razones, entre el costo ($) y el consumo de agua ($m^3$). ¿Qué valor se obtiene? ¿Se obtiene una constante como en las tareas de las situaciones anteriores?

4. De acuerdo con la gráfica, complete los valores de la tabla 1:

Tabla 1. Costo ($) del consumo de agua en metros cúbicos.

Consumo de agua (m^3)	2		5	6	8	10	
Costo ($)		4000		5000			30000

5. ¿En cuánto se incrementa el costo de la factura por cada metro cubico adicional de consumo de agua?

6. ¿Cuál es la razón entre el incremento del costo de la factura y cada metro cubico adicional de consumo de agua? ¿Qué valor se obtiene?

7. ¿Cuál es la expresión matemática que permite calcular el costo de cualquier número de metros cúbicos consumidos?

La siguiente tabla, relaciona los desempeños y las representaciones esperadas en los estudiantes, cuando desarrollen la tarea 1 de la situación 2.

Tabla 10. Preguntas, contenidos, desempeños y tipos de representación esperados T_1S_2

Preguntas	Contenidos	Desempeños esperados	Tipo de representación
P_1	Representación gráfica de una función lineal afín de la forma $y = f(x) = kx + b$	Calcula el costo de seis metros cúbicos.	Conversión desde la representación gráfica, hacia la representación verbal, para calcular la función costo que le corresponden a cierta cantidad de metros cúbicos.
P_2	Representación gráfica de una función lineal cuyo modelo matemático es, $y = f(x) = kx + b$	Reconoce el punto de la gráfica, para el cual, la línea corta al eje de las ordenadas, como el costo fijo de la función.	Conversión desde la representación gráfica, hacia la representación verbal, para calcular un valor constante de la función costo
P_3	Razones y proporciones. Constante de proporcionalidad	Reconoce que la constante de proporcionalidad entre dos magnitudes covariacionales, ya no es la razón entre los valores del costo, y los metros cúbicos.	Actividad de conversión desde un registro gráfico, hacia un registro numérico, para calcular la supuesta constante de proporcionalidad.
P_4	Registro tabular de una función lineal	Completa los valores de la tabla, a partir de los incrementos en la variable independiente x	Conversión desde la representación gráfica, hacia el registro tabular, para determinar los incrementos de las variables.

P_5	Incrementos entre las variables de una función	Calcula el incremento de la función costo por cada metro cubico	Conversión desde el registro gráfico, hacia el registro verbal, para calcular el incremento de la variable dependiente.
P_6	Registro tabular de una función lineal	Calcula la constante de proporcionalidad de función $y = f(x) = kx + b$	Conversión desde el registro gráfico, hacia el registro tabular, para calcular la razón entre los incrementos de las variables, es decir, la constante de proporcionalidad de la función.
P_7	Registro simbólico de una función lineal	Determina la expresión matemática, que permite calcular el costo de cualquier cantidad de metros cúbicos, utilizando el modelo matemático $y = f(x) = kx + b$	Actividad de conversión desde un registro gráfico, hacia un registro simbólico, para obtener expresión $y = f(x) = 500x + 2000$

4.2.2 Tarea 2 – situación 2

Juan es un taxista que cobra por subir al taxi (banderazo) un costo fijo de $ 400 y $ 80 por cada trayecto de 200 metros recorridos. Si $\boldsymbol{x}$ representa el número de trayectos recorridos, la función que permite determinar el costo de un viaje en el taxi de Juan, es

$$y = f(x) = 80x + 400$$

La tabla 1, representa algunos trayectos recorridos

Tabla 1. Costo del viaje por trayectos

Cantidad de trayectos (x)	**Costo del viaje $f\ (x)$**
0	400
1	480
2	560
3	640

Conteste cada una de las preguntas, de acuerdo con la tabla 1.

1. ¿Qué representa que el costo de un viaje sea de $ 400?

2. ¿Cuál es la razón entre el incremento del costo ($) del viaje y cada trayecto recorrido? ¿Qué valor se obtiene? ¿Qué valor representa de la expresión matemática?

3. De acuerdo con la función $y = f(x)$ que permite calcular el costo de un viaje en el taxi de Juan, complete los valores de la tabla 2:

Tabla 2. Costo ($) del consumo de agua en metros cúbicos.

$\boldsymbol{x}$	2	4	6	10	20	50	100
$\boldsymbol{y = f\ (x)}$	560	720					

4. Construya la gráfica que representa la función $y = f(x)$ para $x \in [0, 5]$

5. Si el costo de un viaje es de $ 2800, ¿Cuántos trayectos recorrió el taxi? Explique

La siguiente tabla, relaciona los desempeños y las representaciones esperadas en los estudiantes, cuando desarrollen la tarea 2 de la situación 2.

Tabla 11. Preguntas, contenidos, desempeños y tipos de representación esperados T_2S_2

Preguntas	Contenidos	Desempeños esperados	Tipo de representación
P_1	Representación tabular de una función lineal.	Reconoce que el punto (0, 400), representa el costo fijo del viaje en la tabla, y el valor que se adiciona en la expresión algebraica.	Conversión desde el registro tabular, hacia el registro verbal para reconocer, que si $x = 0$, entonces $y = f(0) = 400$.
P_2	Razones y proporciones	Calcula la constante de proporcionalidad de la función, a partir de la razón entre el incremento en la variable y (Costo), y el incremento en la variable x (cantidad de trayectos)	Actividad de tratamiento en el registro tabular, para calcular la constante de proporcionalidad de la función lineal, y contrastarla con la unidad significante de la expresión algebraica.
P_3	Representación tabular y simbólica de una función lineal.	Determina la tabla de valores que representan puntos de la expresión algebraica	Conversión desde el registro algebraico, hacia el registro tabular, para escribir puntos de la forma $(x, y = f(x))$
P_4	Representación tabular y grafica de una función lineal.	Realiza la gráfica que representa la función, a partir de una tabla de valores	Conversión desde el registro tabular, hacia el registro gráfico, para determinar la clase de recta que se obtiene.
P_5	Expresión algebraica de una función	Calcula el valor de la función costo, para un valor dado de x trayectos.	Actividad de tratamiento en el registro simbólico, para obtener el valor de la variable y, dado un valor de x.

4.3 Situación 3: Magnitudes proporcionales

La tercera situación, al igual que la situación anterior, hace referencia a la variación de magnitudes que son proporcionales, donde, a partir de dos tareas que la conforman, se hace énfasis en el reconocimiento de la relación de magnitudes proporcionales, a partir de distintos registros de representación semiótico.

La primera tarea, está propuesta desde un lenguaje verbal y tabular, y cada una de las preguntas, conllevan a que el estudiante, reconozca las unidades significantes al realizar la transformación de un registro a otro. Se propone la actividad de conversión desde el lenguaje tabular, al registro gráfico y algebraico respectivamente, de tal forma, que en este último, se reconozcan las unidades significantes k y b, elementos importantes dentro de los esquemas generales del modelo matemático que representa la función lineal afín. Pero este proceso de cambio de registro es complejo, por lo tanto, la posibilidad de particularizar, conjeturar, verificar y argumentar, son los escenarios propicios para la generalización del objeto matemático, es decir, se lleve a cabo la actividad matemática del estudiante. De igual forma, se proponen actividades de tratamiento, que acerquen a los estudiantes a la complejidad de la transformación anterior.

La segunda tarea de esta situación, está propuesta desde el registro gráfico, y se espera que en cada una de las preguntas, los estudiantes realicen las actividades de tratamiento y conversión en este registro, de tal modo, que el estudiante reconozca algunos elementos importantes tales como: puntos de corte con los ejes y evalué la función para un valor dado. Se propone la actividad de conversión, desde el registro gráfico, al registro tabular, para determinar la unidad significante constante de proporcionalidad, y al registro algebraico, para determinar el valor de la invariante b en la función $y = f(x) = -kx + b$. En esta tarea, la representación gráfica, cambió, por ende, se espera que los estudiantes reconozcan el valor negativo de k.

Propósitos: Favorecer a los estudiantes en el reconocimiento del modelo de función lineal $y = kx + b$, a partir de situaciones de variación y de cambio, dados desde distintos sistemas de representación semiótica.

Favorecer a los estudiantes en el tratamiento y la conversión de los diferentes registros de representación semiótica de una función lineal, a partir de los registros: verbal, tabular y gráfico.

4.3.1 Tarea 1-Situacion 3

En grupos de tres estudiantes, responda las tareas 1 y 2 de la situación problema 3, realizando los procedimientos correspondientes.

Aguas del Valle es una empresa de acueducto que presta el servicio de agua potable al Valle del Cauca. La factura que reciben los usuarios, tienen un cargo básico de $15.000, y cada metro cubico (m^3) consumido en un hogar tiene un costo de $2.000.

La tabla 1, representa la función que permite calcular el costo de una factura, para algunos metros cúbicos consumidos.

Tabla 1. Costo de la factura por cada m^3

Cantidad de metros cúbicos	Costo ($) de la factura
0	15.000
2	19.000
4	23.000

10	35.000

Conteste cada una de las preguntas, de acuerdo con la tabla 1.

1. ¿Qué representa que el costo de una factura de un usuario sea de $ 15.000?

2. Represente los datos de la tabla 1 en un plano cartesiano

3. Si $y = f(x)$ representa la función que permite calcular el ***costo de una factura***, ¿cuál es la expresión matemática de la forma $y = f(x) = k.x + b$, que permite calcular el costo para cualquier cantidad $\boldsymbol{x}$ de metros cúbicos de agua consumidos por un hogar?

4. Si el costo de una factura es de $ 45.000, ¿Cuántos metros cúbicos de se consumieron?

5. Para 5 metros cúbicos de agua consumidos, ¿cuál es el valor de la factura a cancelar?

La siguiente tabla, relaciona los desempeños y las representaciones esperadas en los estudiantes, cuando desarrollen la tarea 1 de la situación 3.

Tabla 12. Preguntas, contenidos, desempeños y tipos de representación esperados T_1S_3

Preguntas	Contenidos	Desempeños esperados	Tipo de representación
P_1	Representación tabular de una función lineal afín.	Reconoce que el punto (0, 1500), representa el costo de 0 metros cúbicos.	Actividad de conversión desde el registro tabular, hacia el registro verbal, para reconocer que si $x = 0$, entonces $y = f(0) = 15000.$
P_2	Representación tabular y grafica de una función lineal afín.	Realiza la gráfica que representa la función lineal afín, a partir de una tabla de valores	Actividad de conversión desde el registro tabular, hacia el registro gráfico, para reconocer y contrastar sus unidades significantes.

P_3	Representación tabular y simbólica de una función lineal.	Determina la expresión algebraica, que representa la función.	Actividad de conversión desde el registro verbal o tabular, hacia el registro simbólico, para reconocer y contrastar sus unidades significantes.
P_4	Representación tabular de una función	Determina la cantidad de metros cúbicos, para cierto valor de la función.	Actividad de tratamiento en el registro tabular, para reconocer el valor de la variable independiente, a partir de la extrapolación de datos.
P_5	Representación tabular de una función	Determina el costo de una factura, para cierta cantidad de metros cúbicos	Actividad de tratamiento en el registro tabular, para reconocer el valor de la función, a partir de la interpolación de datos.

4.3.2 Tarea 2 – Situación 3

La cantidad de combustible de un vehículo, varía de acuerdo a la distancia recorrida. La figura 1, muestra la distancia recorrida por un automóvil que tiene un tanque con capacidad de 60 litros.

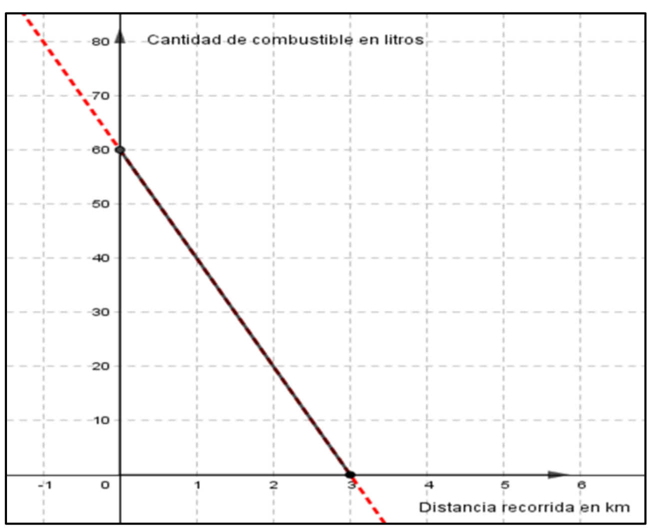


Figura 1. Cantidad de combustible por cada km. recorrido

Conteste cada una de las preguntas, de acuerdo con la figura 1.

1. ¿Qué representa en la línea recta, el punto $(0, 60)$ y $(3, 0)$, respectivamente?
2. Al recorrer 2 km de distancia, ¿Cuánto combustible consume el vehículo?
3. ¿Cuál es la razón entre cambio de la cantidad de combustible y la distancia recorrida por el automóvil? ¿Qué valor se obtiene?
4. Si $y = f(x)$ representa la cantidad de combustible y x representa la distancia recorrida por el automóvil, ¿cuál es la expresión algebraica que permite calcular la cantidad de combustible?
5. Si el vehículo recorre una distancia de 1,5 km, ¿Cuánto combustible tiene el vehículo?

La siguiente tabla, relaciona los desempeños y las representaciones esperadas en los estudiantes, cuando desarrollen la tarea 2 de la situación 3.

Tabla 13. Preguntas, contenidos, desempeños y tipos de representación esperados T_2S_3

Preguntas	Contenidos	Desempeños esperados	Tipo de representación
P_1	Representación gráfica de una función lineal afín.	Reconoce los puntos de corte de la recta con los ejes de coordenadas	Actividad de conversión desde el registro gráfico, hacia el registro verbal, para reconocer los puntos de corte con los ejes de una línea recta.
P_2	Representación gráfica de una función lineal afín.	Determina el valor que le corresponde a la función, cuando el valor de la distancia x, es 2 km.	Actividad de conversión desde el registro gráfico, hacia el registro numérico, para calcular el valor de la función, cuando el valor de la distancia x es 2 km.
P_3	Representación gráfica de una función lineal afín. Constante de	Calcula la razón entre el incremento de la variable dependiente y la variable independiente	Conversión desde el registro gráfico, hacia el registro tabular, para determinar la constante de proporcionalidad, que

	proporcionalidad		es una unidad significante de la función lineal afín.
P_4	Representación gráfica y algebraica de una función lineal afín	Encuentra la expresión algebraica de una función lineal cuyo modelo matemático es $y = f(x) = kx + b$, a partir de su gráfica.	Conversión desde el registro gráfico, hacia el registro algebraico, y determina el valor de las unidades significantes k y b.
P_5	Representación gráfica de una función con modelo matemático $y = f(x) = kx + b$	Determina el valor de la función $y = f(x)$, para cierto valor de x, en la función $y = f(x) = -20x + 40$	Actividad de conversión desde el registro gráfico, hacia el registro numérico, para calcular el valor de la función, a partir de la interpolación de datos.

4.4 Situación problema 4

La cuarta y última situación problema, dada desde un contexto de las matemáticas, hace referencia al tratamiento y conversión de la función lineal y afín, a partir de un recurso de GeoGebra, donde las tareas que la conforman, permiten afianzar en la complejidad conceptual del objeto matemático. La función lineal, dada desde un lenguaje gráfico, permite el reconocimiento de la familia de funciones de la forma $y = f(x) = kx + b$, y por ende, el reconocimiento cualitativo para la conversión entre las representaciones gráfica y algebraica.

La primera tarea, está propuesta desde un registro de representación gráfico, a partir de un archivo, que contiene la familia de funciones $y = f(x) = kx$, donde k $(-5 < k < 5)$, es un deslizador, que asigna valores a k, para obtener distintas funciones. Cada una de las preguntas, conllevan a que el estudiante, al realizar la transformación de un registro a otro, reconozca las unidades significantes, tales como $k > 1, k = 1$, sentido de inclinación de la recta, entre otros.

De igual forma, se proponen actividades de tratamiento, que acerquen a los estudiantes a la conceptualización del concepto de función lineal. En la pregunta 2, cuando k toma los valores de 3 y -3, los estudiantes deben responderla, sin hacer uso del recurso de GeoGebra. De igual forma las preguntas 5 y 6, se resuelven sin la visualización del archivo trabajado.

La segunda tarea, está propuesta desde un archivo que contiene la familia de funciones $y = f(x) = kx + b$, representadas de forma gráfica, donde k $(-3 < k < 4)$ y b $(-4 < b < 5)$, son deslizadores, que asignan valores a k y b respectivamente, para obtener distintas funciones. Cada una de las preguntas, conllevan a que el estudiante, al realizar la transformación de un registro a otro, reconozca las unidades significantes, tales como $k > 1, k = 1$, sentido de inclinación de la recta, ángulo de inclinación respecto al eje x, entre otros.

De igual forma, se proponen actividades de tratamiento, que acerquen a los estudiantes a la conceptualización del concepto de función lineal y afín.

Las preguntas 7 a 10, se resuelven sin hacer uso del recurso de GeoGebra. La pregunta 10, es una tarea de reconocimiento de las unidades significantes, cuando se realiza la conversión entre un registro gráfico y algebraico, o viceversa, y este ítem, permite medir el umbral de la comprensión, de acuerdo a la teoría de Duval (2006).

Propósitos: Favorecer a los estudiantes en el reconocimiento del modelo de función lineal $y = kx + b$, a partir de un recurso de GeoGebra, planteado desde un registro grafico

Favorecer a los estudiantes en el tratamiento y la conversión de los registros de representación semiótica gráfico y expresión algebraica, a partir de un archivo de GeoGebra.

4.4.1 Tarea 1- Situación 4

Lea atentamente cada una de las tareas asignadas en el cuestionario. Los archivos a manipular, son construcciones en el software matemático GeoGebra. En grupos de tres estudiantes, responda las preguntas de cada una de las tareas, realizando los procedimientos correspondientes.

Ingrese al link https://www.geogebra.org/materials/**.** Busque el archivo Función lineal 1 de Diego Solarte Pabón, y descárguelo. Abra el archivo y verifique que su interfaz aparezca como en la figura 1. Mueva el deslizador k, $(-5 < k < 5, k\ un\ número\ real)$ y verifique que la función cambia gráficamente y algebraicamente.

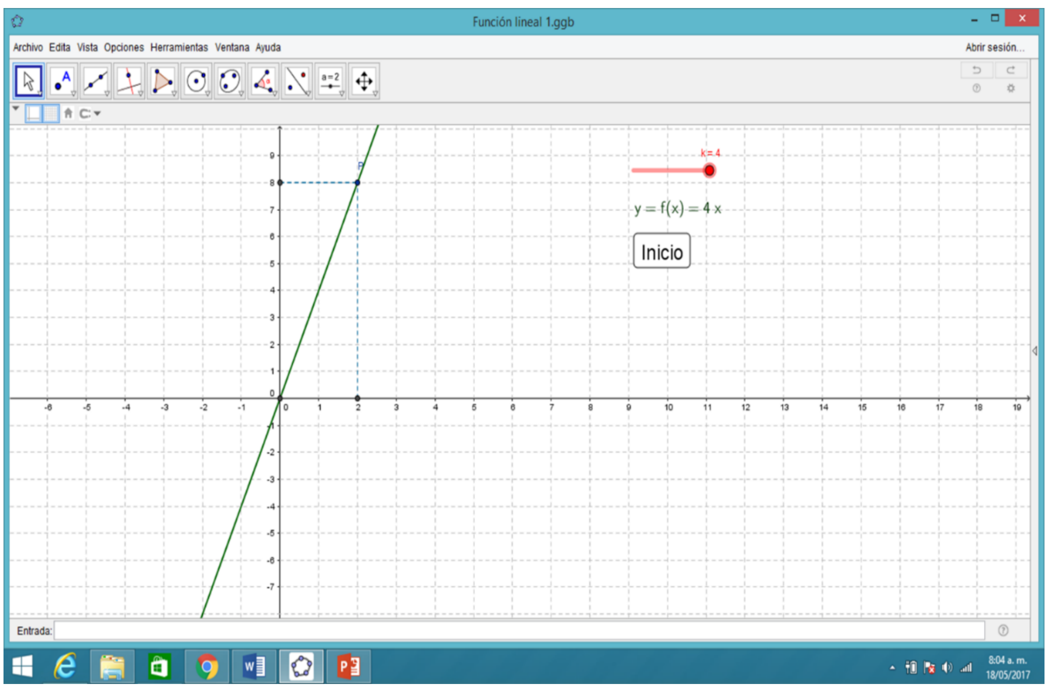


Figura 1: Interfaz del archivo de GeoGebra Función lineal 1 de Diego Solarte Pabón

1. Mueva el deslizador de tal forma que $k = 2$. Ubique el punto P de la función, de tal forma que asigne distintos valores en el plano cartesiano. Complete los valores de la tabla:

Valor de x	**Valor de $y = f(x)$**	**P (x, y)**
-2	-4	$(-2, -4)$
-1		
0		
1		
2		
3		

2. Mueva el deslizador de tal forma que k sea equivalente a -1, 1, -3 y 3, respectivamente. Complete los valores de la tabla:

Valor de k	**Representación algebraica de la función**	**Representación gráfica de la función**
$k = -1$		
$k = 1$		
$k = -3$		
$k = 3$		

3. ¿Qué conclusión obtienes a partir de la información de la tabla anterior?

4. Utilizando transportador, mide el ángulo que se forma entre la función $y = f(x)$ y el eje x (Eje de las abscisas), cuando k es 1 y 3, respectivamente. ¿Representan la misma función?, justifique su respuesta.

5. Dadas las funciones de la figura 2, ¿cuál tiene constante $k = 1$ o $k > 1$?, justifique.

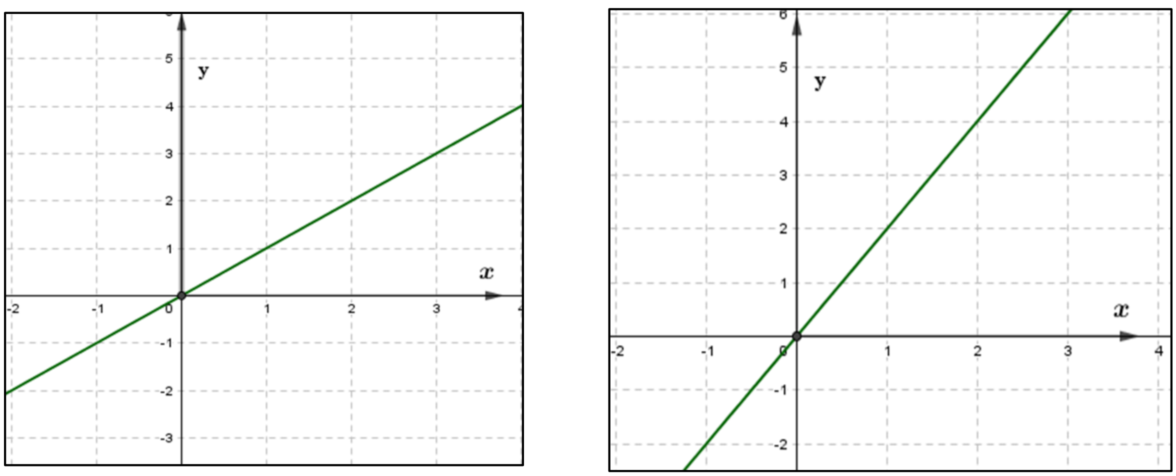


Figura 2: Función lineal de la forma $y = f(x) = k.x$

6. Dadas las funciones de la figura 3, ¿cuál tiene constante positiva o negativa, es decir, $k > 0$ o $k < 0$?, justifique.

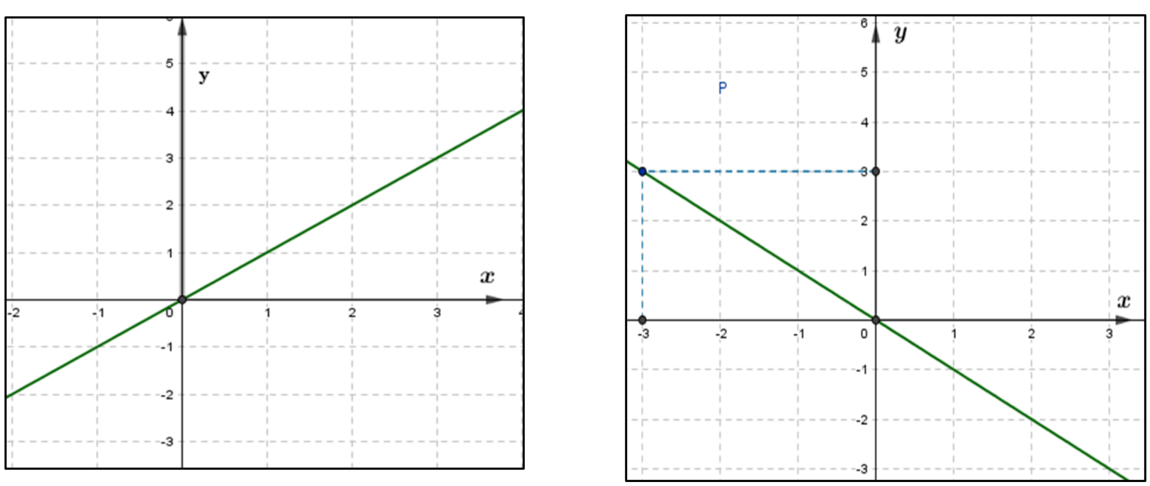


Figura 3: Función lineal de la forma $y = f(x) = k.x$

7. Escriba dos conclusiones (características) de las funciones trabajadas anteriormente.

La siguiente tabla, relaciona los desempeños y las representaciones esperadas en los estudiantes, cuando desarrollen la tarea 1 de la situación 4.

Tabla 14. Preguntas, contenidos, desempeños y tipos de representación esperados T_1S_4

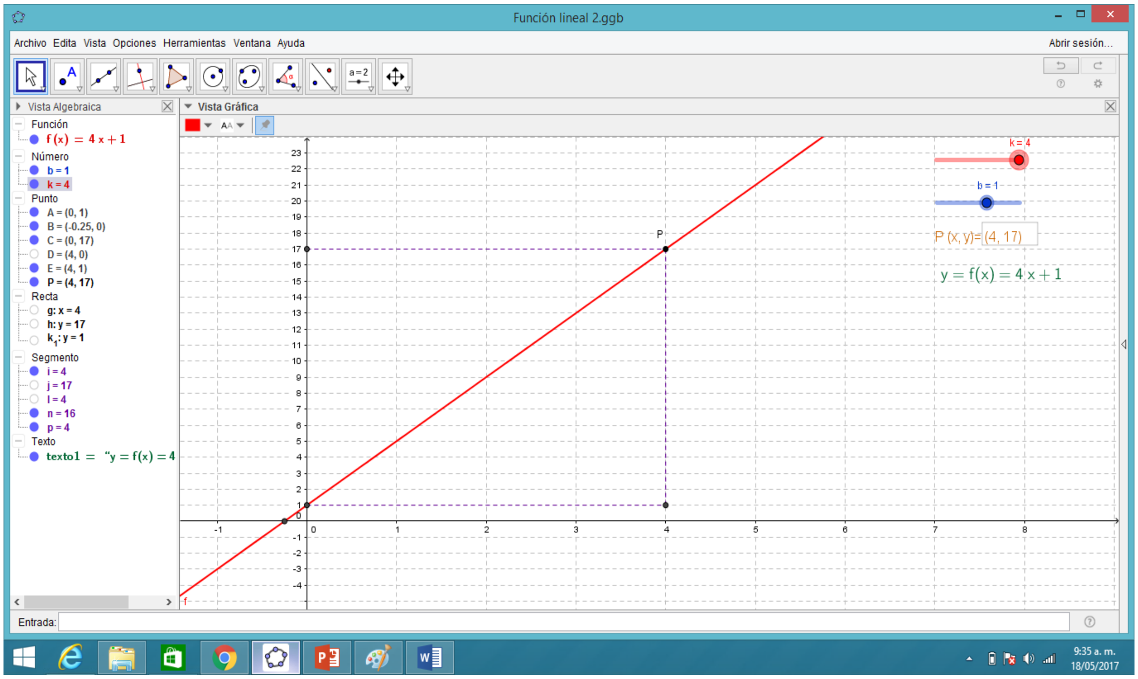
Preguntas	Contenidos	Desempeños esperados	Tipo de representación
P_1	Representación tabular y grafica de una función lineal.	Completa los valores de la tabla, a partir del registro grafico	Actividad de conversión desde el registro gráfico, hacia el registro tabular, para calcular el valor de la función, a partir de valores de x.
P_2	Representación algebraica y grafica de una función lineal.	Determina la gráfica y la expresión algebraica de la función cuyo modelo es $y = f(x) = kx$, a partir de los valores que toma k.	Conversión desde el registro gráfico, hacia el registro algebraico, para determinar sus unidades significantes.
P_3	Representación gráfica y simbólica de una función lineal.	Determina el sentido de la función lineal, a partir de los valores de k.	Conversión desde el registro gráfico, hacia el registro verbal, para explicar las características de la función lineal, a partir de sus unidades significantes.
P_4	Representación gráfica de una función lineal	Determina el valor del ángulo para cada una de las funciones de la tabla, y comparar la recta que representa el modelo de función $y = f(x) = kx$.	Conversión desde el registro gráfico, hacia el registro numérico, para calcular el valor del ángulo que se forma entre el eje x, y el trazo de la línea, y relacionarlo con el valor de k.
P_5	Representación gráfica de una función lineal.	Justifica el valor de la constante para cada una de las gráficas, a partir de su representación gráfica.	Conversión desde el registro gráfico, hacia el registro numérico, para determinar variaciones

			de la unidad significante k.
P_6	Representación gráfica de una función lineal.	Justifica el valor de la constante para cada una de las gráficas, a partir de su representación gráfica.	Conversión desde el registro gráfico, hacia el registro numérico, para determinar variaciones de la unidad significante k.
P_7	Representación gráfica y simbólica de una función lineal.	Determina las unidades significantes de la función lineal cuyo modelo de función es $y = f(x) = kx$.	Conversión desde el registro gráfico, hacia el registro verbal, para explicar las características de la función lineal, a partir de sus unidades significantes.

Figura 4: Interfaz del archivo de GeoGebra Función lineal 2 de Diego Solarte Pabón

4.4.2 Tarea 2 – Situación 4

Ingrese al link https://www.geogebra.org/materials/**.** Busque el archivo Función lineal 2 de Diego Solarte Pabón, y descárguelo. Abra el archivo y verifique que su interfaz aparezca como en la figura 4. Mueva el deslizador k, $(-3 < k < 4, k\ un\ número\ real)$ y verifique que la función cambia gráficamente y algebraicamente.



Conteste cada una de las preguntas, justificando con los procedimientos correspondientes.

1. Mueva el deslizador k, de tal forma que $k = 2$. Mueva el valor de b $(-4 < b < 5)$, y complete los valores de la tabla:

Valor de *b*	**Representación algebraica de la función**	**Representación gráfica de la función**
$\mathrm{b} = -3$		
$\mathrm{b} = -1$		
$\mathrm{b} = 0$		

$b = 2$

2. Represente en un mismo plano cartesiano las funciones de la tabla.

3. ¿Qué representa el valor de b en la familia de funciones $y = f(x) = 2.x + b$?

4. Mueva los deslizadores k y b, de tal forma que tomen los valores asignados. Mueva el punto P sobre la función, y complete los valores de la tabla:

Valores de k y b	**Expresión algebraica de la forma $y = f(x) = kx + b$**	**Punto de corte con el eje x**	**Punto de corte con el eje y**
$k = 1$ $b = -2$			
$k = 0$ $b = 3$			
$k = -4$ $b = 0$			
$k = -2$ $b = 4$			

5. ¿Qué sucede cuando la línea (trazo), corta al eje $\boldsymbol{x}$, y al eje $\boldsymbol{y}$, respectivamente? Explique

6. En la función, $\boldsymbol{y = f(x) = -5x + 2,}$ en ¿qué punto la gráfica que la representa, corta al eje $\boldsymbol{x}$ y al eje $\boldsymbol{y,}$ respectivamente?

7. Dadas las gráficas de la figura 5, ¿cuál es la expresión algebraica que representa cada gráfica de la función? Explique

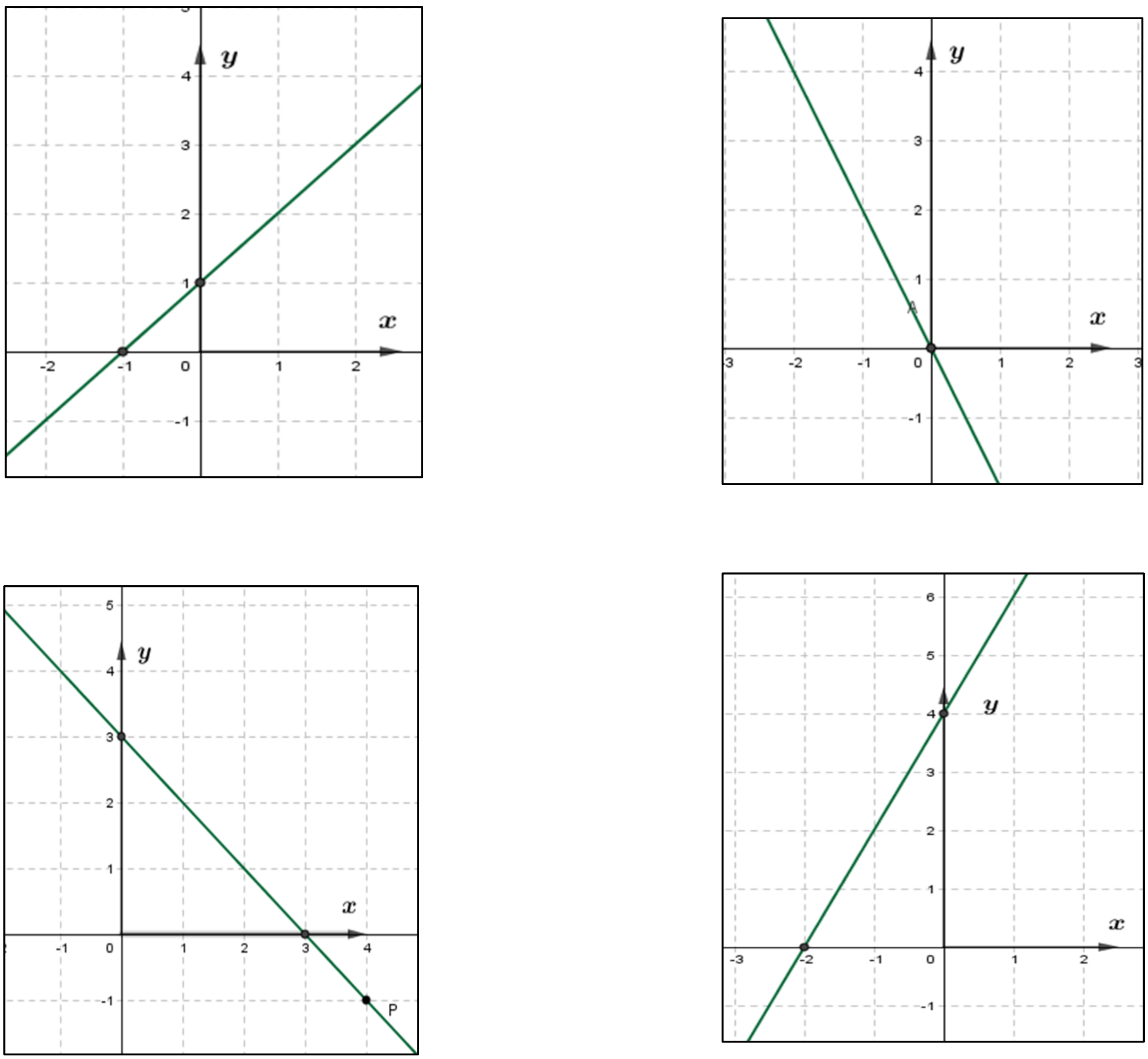
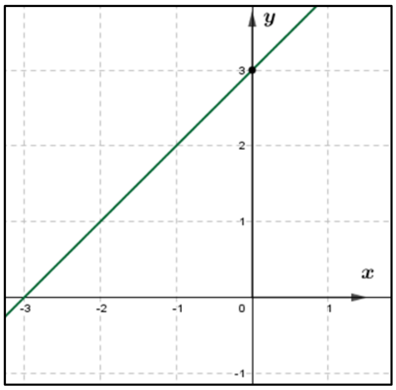
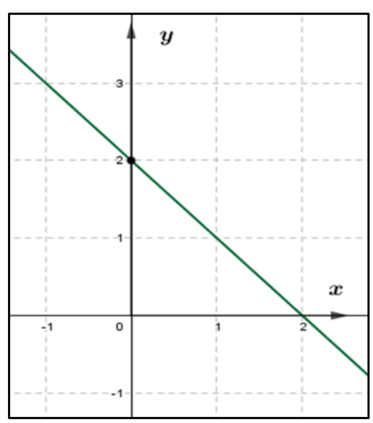


Figura 5: Representación gráfica de una función lineal $y = kx + b$

8. Complete los valores de la tabla, teniendo en cuenta la representación inicial y la representación final de cada función.

Representación inicial	**Representación final**
	
$y = f(x) = -4x$	
$y = f(x) =$	

9. Las gráficas de la figura 6, representan una función de la forma $y = kx + b$. En ¿cuál de las dos gráficas, el valor de b=0? Justifique

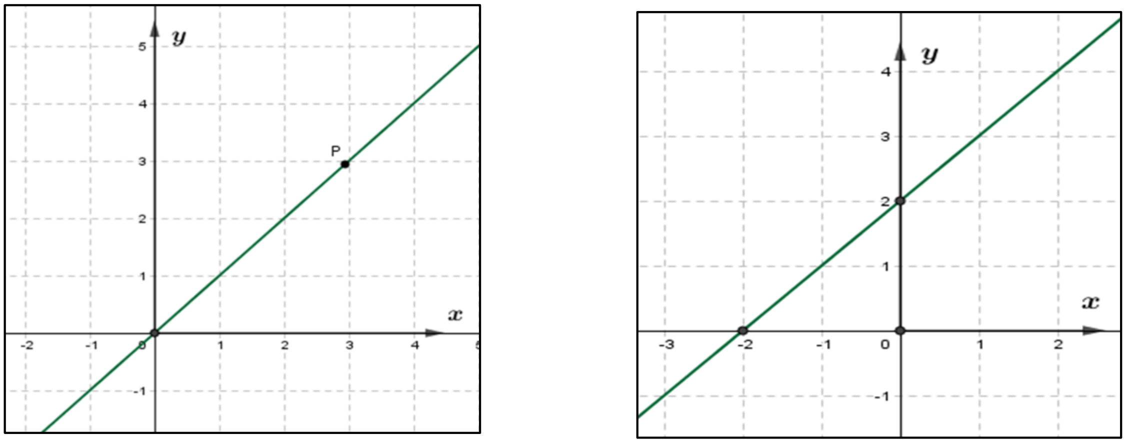
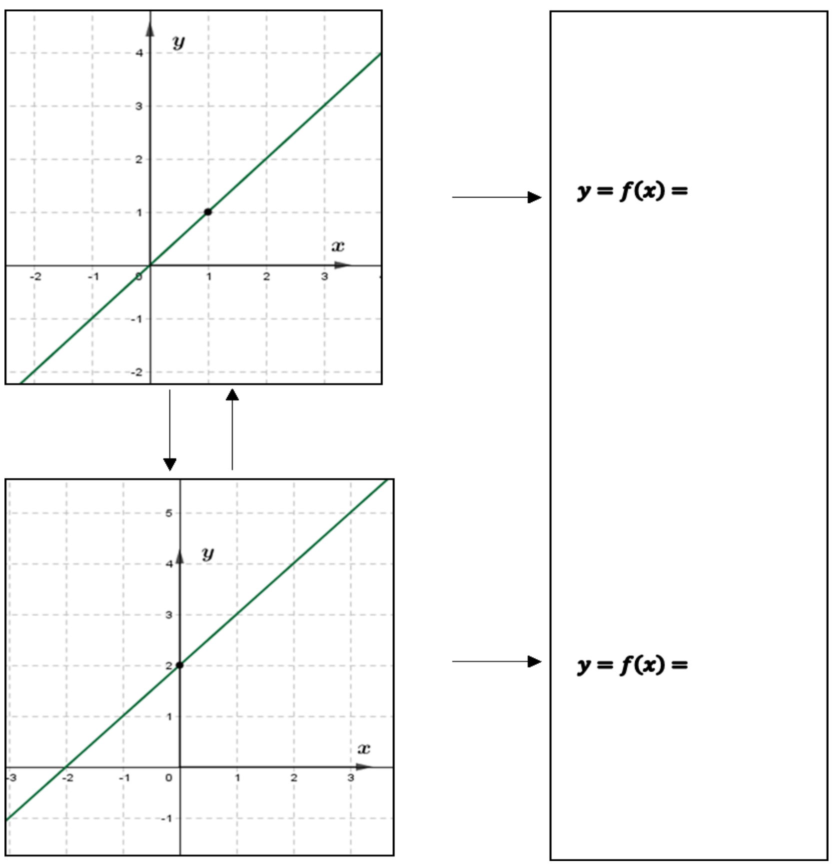
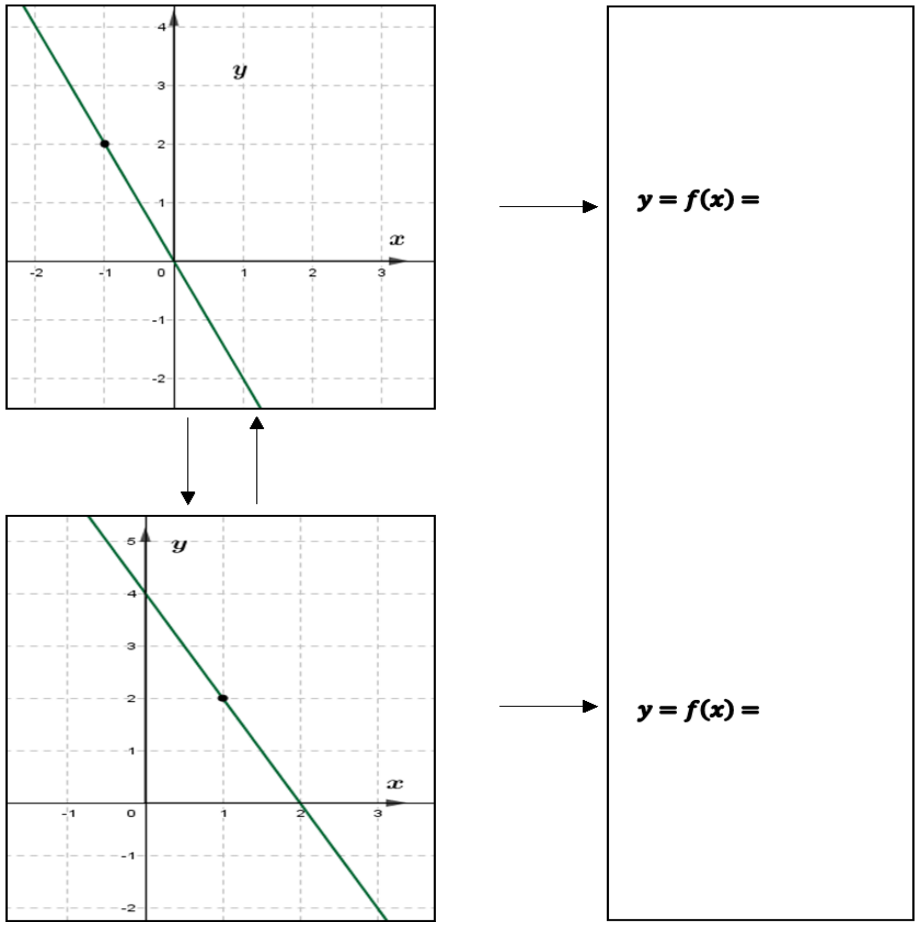


Figura 6. Representación gráfica de la función $y = kx + b$

10. Para cada una de las funciones de la figura 7, se realizan variaciones del contenido que las representan. Escribir la representación (grafica o expresión algebraica), según convenga





La siguiente tabla, relaciona los desempeños y las representaciones esperadas en los estudiantes, cuando desarrollen la tarea 2 de la situación 4.

Tabla 15. Preguntas, contenidos, desempeños y tipos de representación esperados T_2S_4

Preguntas	Contenidos	Desempeños esperados	Tipo de representación
P_1	Representación algebraica y grafica de una función lineal.	Determina la gráfica y la expresión algebraica, a partir de los valores que toma k.	Conversión desde el registro gráfico, hacia el registro algebraico, para contrastar sus unidades significantes.
P_2	Representación gráfica de una función lineal.	Representa las gráficas de $y = f(x) = 2.x + b$, cuando b, toma los valores de -3, -1, 0 y 2	Conversión desde el registro gráfico, hacia el registro algebraico, para contrastar sus unidades significantes.

P_3	Representación algebraica de una función lineal.	Explica el valor de b, en la familia de funciones, como el punto de intersección con el eje de las ordenadas.	Conversión desde el registro algebraico, hacia el registro verbal, para justificar el valor de b, en la familia de funciones, cuando pasa por el origen, por encima del origen o pasa por debajo del origen de coordenadas.
P_4	Representación gráfica y tabular de una función lineal	Completa los valores de la tabla, a partir de la representación gráfica de una función afín.	Actividad de conversión, desde el registro gráfico, hacia el registro tabular, para calcular los puntos de corte de la línea recta con los ejes de coordenadas.
P_5	Representación gráfica de la función	Explica cuando la línea recta corta a los ejes de coordenadas.	Conversión desde el registro gráfico, hacia el registro verbal, para explicar, qué ocurre en los puntos de intersección con los ejes de coordenadas.
P_6	Representación algebraica de la función lineal afín	Calcula los puntos de corte con los ejes de la función $y = f(x) = -5x + 2$.	Conversión desde el registro simbólico, hacia el registro numérico, para determinar puntos, que tienen la forma $(x, 0)\ y\ (0, y)$
P_7	Representación gráfica y algebraica de una función lineal afín.	Determina la expresión algebraica de cada una de las gráficas de la figura.	Actividad de conversión desde el registro gráfico, hacia el registro algebraico, para calcular la expresión algebraica del modelo de función $y = f(x) = kx + b$.
P_8	Representación gráfica y algebraica de	Determina la expresión algebraica o viceversa, de cada una de las	Actividad de conversión desde el registro gráfico, hacia el registro

	una función lineal.	representaciones gráficas de la figura.	algebraico, o viceversa, para contrastar sus unidades significantes.
P_9	Representación gráfica de una función lineal.	Determina el punto por el cual la recta pasa por el origen, por encima del origen o por debajo del origen	Conversión desde el registro gráfico, hacia el registro verbal, para justificar el punto por donde pasa la recta pasa: por el origen, por encima del origen o por debajo del origen
P_{10}	Representación gráfica y algebraica de una función lineal.	Determina la expresión algebraica o viceversa, de cada una de las representaciones gráficas de la figura.	Actividad de conversión desde el registro gráfico, hacia el registro algebraico, o viceversa, para analizar los vínculos entre las posibles variaciones del contenido de las representaciones.

5. Resultados y análisis de resultados

Los resultados de las preguntas de cada tarea de cada una de las situaciones, corresponden al tipo de representación (actividad de tratamiento o conversión), que realiza el estudiante frente a un registro de representación semiótica, el cual está propuesto desde una situación problema. Estos resultados, se organizan por medio de tablas, teniendo en cuenta las siguientes características: tipos de respuestas, respuestas, número de estudiantes y porcentaje. La clasificación de los tipos de respuesta, permite sistematizar y contrastar las respuestas de los estudiantes, de acuerdo a lo planteado en el capítulo anterior. Las tablas, van acompañadas de la pregunta, el título y el análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes. En este sentido, $\mathrm{P}_1\mathrm{T}_1\mathrm{S}_1$ representa la pregunta 1 de la tarea 1 de la situación 1.

Los análisis de los resultados, se realizaron a partir de los registros de las respuestas de los estudiantes, los cuales, permitieron contrastarlos con la intencionalidad establecida en cada una de las tareas. Se escanean algunos de los registros de los estudiantes, para darle validez a las afirmaciones del análisis de los resultados.

5.1 Resultados y análisis de resultados situación 1

5.1.1 Resultados y análisis de resultados tarea 1

El costo ($) de las fotocopias, depende de su cantidad. Diez fotocopias cuestan $ 300. Responda las siguientes preguntas

1. ¿Qué magnitudes intervienen en el problema? ¿Cada cuánto aumenta el costo de las fotocopias?

Tabla 16. Tipos de respuestas $P_1T_1S_1$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que reconocen y explican las magnitudes que intervienen en el problema: el costo de las copias y, la cantidad de copias compradas. Estudiantes que reconocen que el costo de las fotocopias aumenta cada \$30	20	86,8
T_2	Estudiantes que reconocen y explican las magnitudes que intervienen en el problema: el costo de las copias y, la cantidad de copias compradas. Estudiantes que no reconocen que el costo de las fotocopias aumenta cada \$30	3	13,2

2. ¿Cuál es la razón entre el costo (\$), y el número de fotocopias $\left(\frac{costo\ (\$)}{numero\ de\ fotocopias}\right)$? Escriba las razones entre el costo (\$), y el número de fotocopias de la tabla. ¿Qué valor se obtiene?, explique.

Tabla 17. Tipos de respuestas $P_2T_1S_1$ y $P_6T_1S_1$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión desde un registro verbal a un registro tabular para calcular el valor de la constante k	23	100
T_2	Estudiantes que no realizan la conversión desde un registro verbal a un registro tabular para calcular el valor de la constante k	0	0

3. ¿Cuántas fotocopias corresponden a \$ 480?

Tabla 18. Tipos de respuestas $P_3T_1S_1$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión desde un registro verbal a un registro tabular para calcular el valor de la constante k.	20	86,8
T_2	Estudiantes que no realizan la conversión desde un registro verbal a un registro tabular para calcular el valor de la constante k	3	13,2

4. Complete los valores de la tabla 1.

Tabla 1. Costo de cierta cantidad de fotocopias

Numero de Fotocopias	2	4	6	8	10	12	14
Costo ($)					300		

Tabla 19. Tipos de respuestas $P_4T_1S_1$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan el tratamiento en un registro tabular, para calcular el valor de la función costo	20	86,8
T_2	Estudiantes que no realizan el tratamiento en un registro tabular, para calcular el valor de la función costo	3	13,2

5. ¿Cuál es el procedimiento para completar cada dato de la tabla?

Tabla 20. Tipos de respuestas $P_5T_1S_1$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que explican el procedimiento, a partir de la constante de proporcionalidad	17	73,8

T_2	Estudiantes que no explican el procedimiento, a partir de la constante de proporcionalidad	3	13,1
T_3	Estudiantes que explican el procedimiento, a partir de la multiplicación de dos números.	3	13,1

6. Es posible, ¿encontrar el costo de cualquier cantidad de fotocopias?, explique

Tabla 21. Tipos de respuestas $P_7T_1S_1$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan un tratamiento en el lenguaje verbal, para explicar el procedimiento, de calcular la cantidad de cualquier cantidad de fotocopias.	11	47,7
T_2	Estudiantes que realizan una conversión del lenguaje verbal al lenguaje tabular, pero no explican el procedimiento, para calcular la cantidad de cualquier cantidad de fotocopias.	9	39,3
T_3	Estudiantes que no explican el procedimiento, para calcular la cantidad de cualquier cantidad de fotocopias.	3	13

7. Represente la tarea 1, en un plano cartesiano

Tabla 22. Tipos de respuestas $P_8T_1S_1$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión desde el lenguaje verbal, hacia la representación gráfica, representando en el eje y, la función costo, y en el eje x, la cantidad de fotocopias.	12	52,1

T_2	Estudiantes que no realizan la conversión desde el lenguaje verbal, hacia la representación gráfica, representando en el eje y, la función costo, y en el eje x, la cantidad de fotocopias.	3	13,2
T_3	Estudiantes que realizan la conversión desde el lenguaje verbal, hacia la representación gráfica, representando en el eje y, la cantidad de fotocopias, y en el eje x, pero no las relacionan.	8	34,7

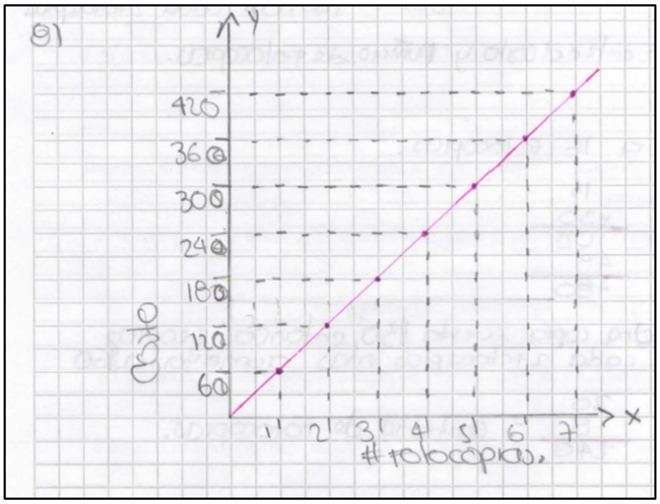
A partir de los datos de las tablas anteriores, se pudo establecer, que más del 80% de los estudiantes, realizaron tratamientos y conversiones, para calcular la constante de proporcionalidad de una función lineal, a partir de razones directamente proporcionales entre valores de la variable dependiente y, y la variable independiente x. Es conveniente señalar que los estudiantes, utilizaron la constante de proporcionalidad para resolver las preguntas 3 a 7, donde funcionó como un operador multiplicativo, que les permitió hallar los valores de las magnitudes trabajadas. Aproximadamente el 50% de los estudiantes realizan la actividad semiótica de conversión entre registros, sin reconocer algunas de las unidades significantes de cada uno de ellos.

En este sentido, en los resultados de la pregunta 4, a pesar de que los estudiantes completan con facilidad los valores de la tabla (esto debido a la visión cuantitativa que ella brinda), la conversión a otro registro se les dificulta, porque la representación tabular, es insuficiente para extraer características globales de la función (Azcarate y Deulofeu, 1990).

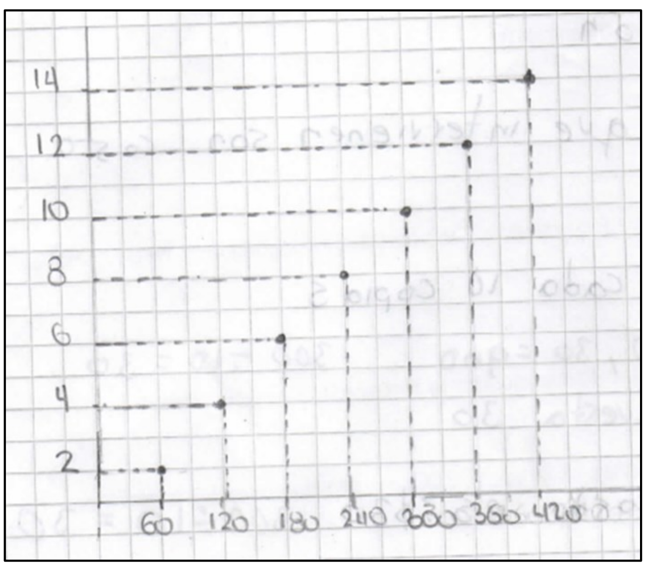
En la pregunta 8 de esta tarea, la conversión desde el lenguaje verbal hacia el registro gráfico, algunos estudiantes no tuvieron en cuenta las siguientes unidades significantes de este tipo de registro: distribución proporcional de los ejes de coordenadas, las variables dependiente e independiente (título de cada eje), el origen de coordenadas, y la línea que pasa por cada uno de esos puntos.

A continuación, se relacionan algunas evidencias de respuestas, dadas por los estudiantes.

Evidencia de respuesta $P_8T_1S_1$ clasificación T_1

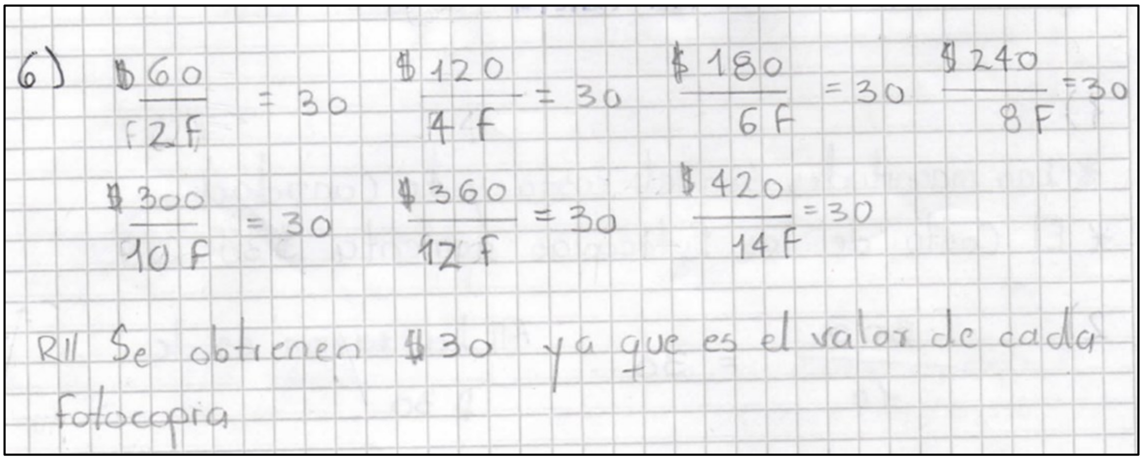


Evidencia de respuesta $P_8T_1S_1$ clasificación T_3



De igual forma, en promedio el 55% de los estudiantes realizan actividades de tratamiento en algunos de los registros propuestos, realizando las conclusiones pertinentes respecto a la constante de proporcionalidad. Sin embargo, algunos de los estudiantes, calculan este valor, sin relacionarle la unidad de medida trabajada, que se refiere a la relación de variación proporcional entre las variables.

Evidencia de respuesta $P_6T_1S_1$ clasificación T_1



Con estos resultados, se puede afirmar que los estudiantes se aproximan a la construcción del concepto de función lineal, pero esto no implica, que el estudiante haya alcanzado la actividad matemática respecto a este concepto matemático, su proceso es más complejo.

> (…) la actividad matemática requiere una coordinación interna, que ha de ser construida, entre los diversos sistemas de representación que pueden ser elegidos y usados; sin esta coordinación dos representaciones diferentes significaran dos objetos diferentes, sin ninguna relación entre ambos, incluso si son dos “contextos de representación” diferentes del mismo objeto (Duval, 2006, p.145).

5.1.2 Resultados y análisis de resultados tarea 2

La distancia recorrida por un vehículo, depende de su cantidad. La figura 1, muestra la distancia recorrida por un automóvil cada vez que transcurre una hora. Conteste cada una de las preguntas, de acuerdo a la figura 1.

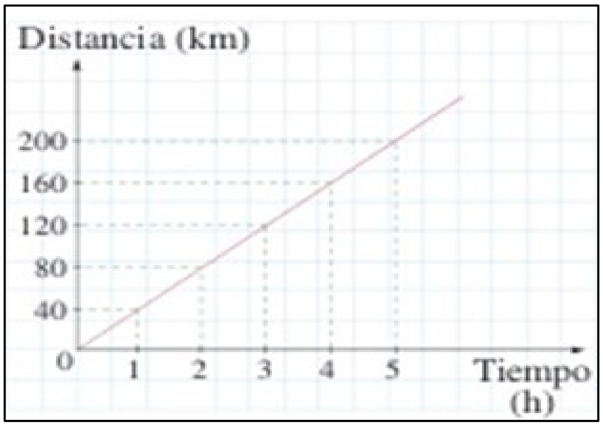


Figura 1. Distancia recorrida por un automóvil, durante varias horas.

1. ¿Qué magnitudes intervienen en el problema?

Tabla 23. Tipos de respuestas $P_1 T_2 S_1$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que reconocen y explican las magnitudes que intervienen en el problema: la distancia y el tiempo	14	60,8
T_2	Estudiantes que reconocen y no explican las magnitudes que intervienen en el problema: la distancia y el tiempo	9	39,2

2. Escriba las razones, entre la distancia recorrida (km) y el tiempo (h). ¿Qué valor se obtiene?

Tabla 24. Tipos de respuestas $P_2 T_2 S_1$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión desde un registro grafico a un registro tabular para calcular el valor de la constante de proporcionalidad k	23	100
T_2	Estudiantes que no realizan la conversión desde un registro grafico a un registro tabular para calcular el valor de la constante de proporcionalidad k	0	0

3. Si la velocidad del automóvil es $v = \frac{distancia}{tiempo}$, ¿cuál es su velocidad?

Tabla 25. Tipos de respuestas $P_3T_2S_1$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión desde un registro grafico a un registro tabular para calcular el valor de la constante de proporcionalidad k	23	100
T_2	Estudiantes que no realizan la conversión desde un registro grafico a un registro tabular para calcular el valor de la constante de proporcionalidad k	0	0

4. ¿Cuál fue la distancia máxima recorrida por el automóvil? ¿Cuánto tiempo utiliza?

Tabla 26. Tipos de respuestas $P_4T_2S_1$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan el tratamiento en el registro gráfico, para determinar la función distancia, de acuerdo al tiempo que le corresponde.	14	60,8

T_2	Estudiantes que no realizan el tratamiento en el registro gráfico, para determinar la función distancia, de acuerdo al tiempo que le corresponde.	9	39,2

5. De acuerdo con la gráfica, complete los valores de la tabla 2:

Tabla 2. Distancia recorrida por un automóvil, de acuerdo a su tiempo

Tiempo (h)	0	1	2	3	4	5	6
Distancia (km)			80				

Tabla 27. Tipos de respuestas $P_5T_2S_1$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro tabular para determinar los valores de la forma $(x, y = f(x))$, y justifican los valores de la tabla, realizando procedimientos.	0	0
T_2	Estudiantes que realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro tabular para determinar los valores de la forma $(x, y = f(x))$, y no justifican los valores de la tabla.	23	100

6. ¿Cuál es la distancia recorrida por el automóvil, transcurridas 10 y 15 h, respectivamente? Explique.

Tabla 28. Tipos de respuestas $P_6T_2S_1$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
	Estudiantes que realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el	11	47,9

T_1	registro numérico, para calcular el valor de la función distancia, para los valores correspondientes de tiempo, a partir de la extrapolación de datos.		
T_2	Estudiantes que no realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro numérico, para calcular el valor de la función distancia, para los valores correspondientes de tiempo, a partir de la extrapolación de datos.	0	0
T_3	Estudiantes que realizan una conversión, desde el registro gráfico, hacia el registro verbal, justificando su respuesta.	12	52,1

7. ¿Cuál sería la forma para calcular la distancia recorrida $(\boldsymbol{d})$ por el automóvil, para cualquier valor de tiempo $\boldsymbol{t}$ (h)?

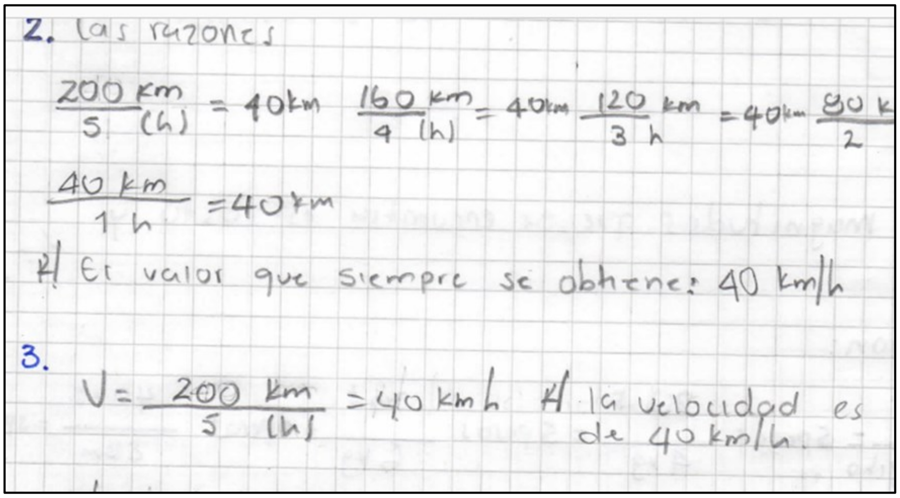
Tabla 29. Tipos de respuestas $P_7T_2S_1$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro simbólico, para calcular la función $y = f(x) = 40x$	6	26
T_2	Estudiantes que no realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro simbólico, para calcular la función $y = f(x) = 40x$.	5	21,9
T_3	Estudiantes que escriben la formula $d = v.t$	12	52,1

A partir de los datos de las tablas anteriores, se pudo establecer, que el 100% de los estudiantes, calcularon la constante de proporcionalidad de una función lineal a partir del registro gráfico, y la utilizaron para realizar tratamientos y conversiones en los registros tabular, verbal y algebraico. Es de notar, que al igual que en los resultados de la tarea anterior, los estudiantes utilizaron este valor para resolver preguntas, donde esta unidad significante, es un operador funcional, que permitía calcular la distancia recorrida para distintos valores de tiempo. Aproximadamente, menos del 30% de los estudiantes realizan la actividad semiótica de conversión desde el registro gráfico, hacia el registro simbólico, y esto se debe, a que los estudiantes no reconocieron la relación de la unidad significante, constante de proporcionalidad, entre los registros mencionados. Es conveniente resaltar, que en la pregunta 5, ninguno de los estudiantes justificaron el procedimiento de la respuesta, por lo cual, se supone, que utilizaron las razones entre las magnitudes de la pregunta 2 o tuvieron en cuenta la variación proporcional de cada una de ellas. De igual forma, en la respuesta de la pregunta 7, más del 50% de los estudiantes, escribieron la fórmula de la distancia, para lo cual se supone, que sus saberes previos están relacionados con la asignatura de Ciencias Naturales – Física. Es de resaltar, que el resultado de esta pregunta, era el esperado, ya que la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro simbólico, requiere de la coordinación entre ellos, donde se reconozca las unidades significantes que los relaciona.

A continuación, se relacionan algunas evidencias de respuestas, dadas por los estudiantes.

Evidencia de respuesta $P_2T_2S_1$ y $P_3T_2S_1$ clasificación T_1



2. las razones

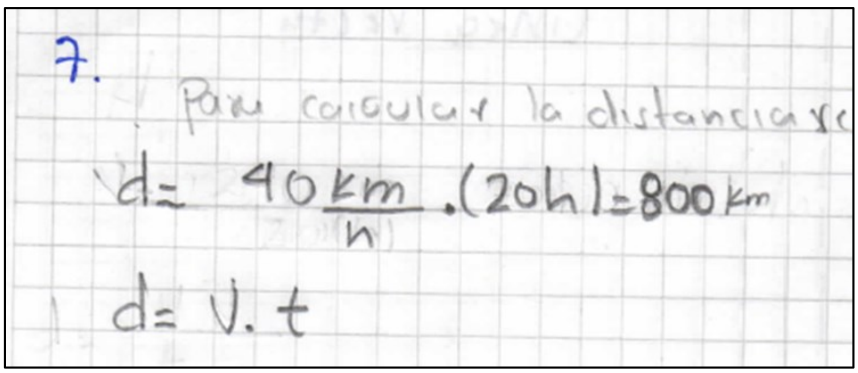
$\frac{200\,km}{5\,(h)} = 40km$ $\frac{160\,km}{4\,(h)} = 40km$ $\frac{120\,km}{3\,h} = 40km$ $\frac{80\,k}{2}$

$\frac{40\,km}{1\,h} = 40km$

R/ El valor que siempre se obtiene: 40 km/h

3. $V = \frac{200\,km}{5\,(h)} = 40\,km\,h$ R/ la velocidad es de 40 km/h.

Evidencia de respuesta $P_7T_2S_1$ clasificación T_3



7. Para calcular la distancia re

$d = 40\frac{km}{h}.(20h) = 800\,km$

$d = V.t$

5.2 Resultados y análisis de resultados situación 2

5.2.1 Resultados y análisis de resultados tarea 1

La figura 1, muestra la relación entre el consumo de agua en metros cúbicos (m^3) de varios hogares del municipio de Cali, y el costo ($) de dicho servicio. Conteste cada una de las preguntas.

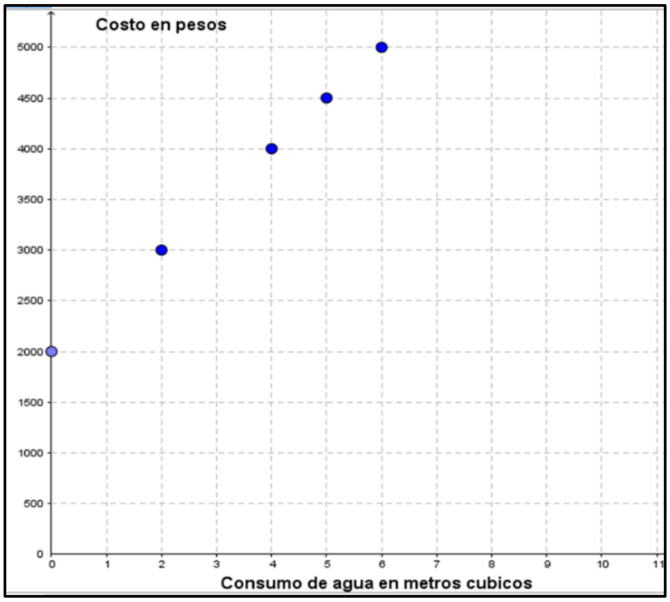


Figura 2**:** Costo ($) del consumo de agua en metros cúbicos.

1. ¿Cuánto le toco pagar al que más agua gastó?

Tabla 30. Tipos de respuestas $P_1T_1S_2$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión desde la representación gráfica, hacia la representación verbal, para calcular la función costo que le corresponden a cierta cantidad de metros cúbicos.	23	100
T_2	Estudiantes que no realizan la conversión desde la representación gráfica, hacia la representación verbal, para calcular la función costo que le corresponden a cierta cantidad de metros cúbicos.	0	0

2. Al hogar que no gastó agua, ¿Cuánto le tocó pagar?

Tabla 31. Tipos de respuestas $P_2T_1S_2$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión desde la representación gráfica, hacia la representación verbal, para calcular un valor constante de la función costo	23	100
T_2	Estudiantes que no realizan la conversión desde la representación gráfica, hacia la representación verbal, para calcular un valor constante de la función costo	0	0

3. Escriba las razones, entre el costo ($) y el consumo de agua ($m^3$). ¿Qué valor se obtiene? ¿Se obtiene una constante como en las tareas de las situaciones anteriores?

Tabla 32. Tipos de respuestas $P_3T_1S_2$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión desde un registro gráfico, a un registro numérico, para calcular la supuesta constante de proporcionalidad.	18	78,1
T_2	Estudiantes que no realizan la conversión desde un registro gráfico, a un registro numérico, para calcular la supuesta constante de proporcionalidad.	5	21,9

4. De acuerdo con la gráfica, complete los valores de la tabla 1:

Tabla 1. Costo ($) del consumo de agua en metros cúbicos.

Consumo de agua (m^3)	2		5	6	8	10	
Costo ($)		4000		5000			30000

Tabla 33. Tipos de respuestas $P_4T_1S_2$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión desde la representación gráfica, hacia el registro tabular, para determinar los incrementos de las variables.	8	34,7
T_2	Estudiantes que no realizan la conversión desde la representación gráfica, hacia el registro tabular, para determinar los incrementos de las variables.	6	26
T_3	Estudiantes que realizan la conversión desde la representación gráfica, hacia el registro tabular, para determinar los incrementos de las variables, sin justificar los valores obtenidos.	9	39,3

5. ¿En cuánto se incrementa el costo de la factura por cada metro cubico adicional de consumo de agua?

Tabla 34. Tipos de respuestas $P_5T_1S_2$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro verbal, para calcular el incremento de la variable dependiente.	18	78,1
T_2	Estudiantes que no realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro verbal, para calcular el incremento de la variable dependiente.	2	8,7
T_3	Estudiantes que realizan la conversión desde la representación gráfica, hacia el registro tabular, para calcular el incremento de la variable dependiente.	3	13,2

6. ¿Cuál es la razón entre el incremento del costo de la factura y cada metro cubico adicional de consumo de agua? ¿Qué valor se obtiene?

Tabla 35. Tipos de respuestas $P_6T_1S_2$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro tabular, para calcular la razón entre los incrementos de las variables, es decir, la constante de proporcionalidad de la función.	18	78,3
T_2	Estudiantes que realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro tabular, para calcular la razón entre los incrementos de las variables, es decir, la constante de proporcionalidad de la función.	5	21,7

7. ¿Cuál es la expresión matemática que permite calcular el costo de cualquier número de metros cúbicos consumidos?

Tabla 36. Tipos de respuestas $P_7T_1S_2$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión desde un registro gráfico, hacia un registro simbólico, para obtener expresión $y = f(x) = 500x + 2000$	3	13
T_2	Estudiantes que no realizan la conversión desde un registro gráfico, hacia un registro simbólico, para obtener expresión $y = f(x) = 500x + 2000$.	5	21,7
T_3	Estudiantes que realizan la conversión desde un registro gráfico, hacia un	9	39,1

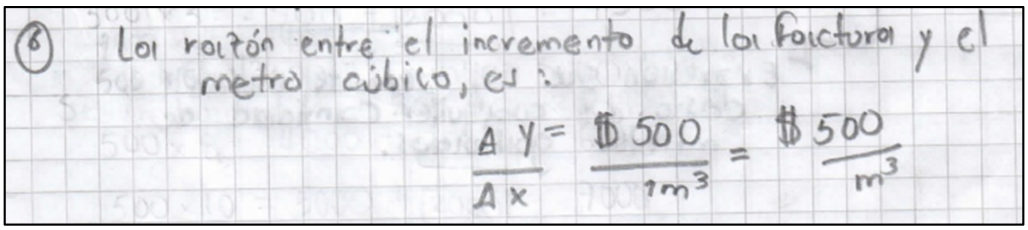
	registro simbólico, pero obtienen una expresión totalmente distinta.		
T_4	Estudiantes que realizan parcialmente la conversión desde un registro gráfico, hacia un registro simbólico, pero obtienen una expresión, sin reemplazar el valor de k.	6	26,2

A partir de los datos de las tablas anteriores, se pudo establecer, que más del 75% de los estudiantes, reconocieron que la razón de proporcionalidad, que anteriormente funcionaba como un operador multiplicativo, ya no es una constante, es decir, en el modelo de función lineal $y = f(x) = kx$, las razones entre variable dependiente (y), y la variable independiente (x), ya no es una constante. Asimismo, en la pregunta 6, los estudiantes confrontan que la nueva constante de proporcionalidad k, está relacionada con la razón entre los incrementos de las variables mencionadas anteriormente. Es por eso, que en las preguntas 5 y 6, el 78% de los estudiantes reconocen el valor de esta constante, a partir de la razón entre los incrementos de la función costo (variable dependiente) y los incrementos de la cantidad de metros cúbicos de agua (variable independiente). Es conveniente resaltar, que en la escritura de esta unidad significante, apareció la expresión $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\$\,500}{m^3}$, que algunos estudiantes relacionaron en la representación gráfica y algebraica de la función.

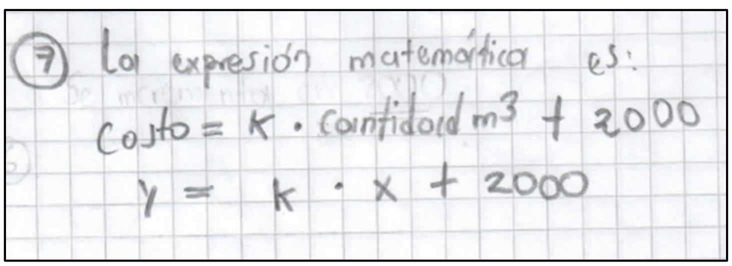
Por otro lado, es importante reconocer, que tres estudiantes, realizaron la actividad de conversión desde el registro gráfico, hacia la expresión algebraica, relacionando sus unidades significantes k y b, lo cual no implica que los estudiantes hayan alcanzado el umbral de la conversión como lo manifiesta Duval (2006) en su teoría de las representaciones semióticas. De igual forma, en las respuestas de los estudiantes referentes con la actividad de conversión en cuestión, seis de ellos, se aproximaron a la obtención de la expresión algebraica propuesta, dado que, a pesar de que calcularon el valor de k, lo escribieron de forma general, dejando de lado, la relación significante entre este valor y la razón entre los incrementos de las variables dependiente e independiente.

A continuación, se relacionan algunas evidencias de respuestas, dadas por los estudiantes.

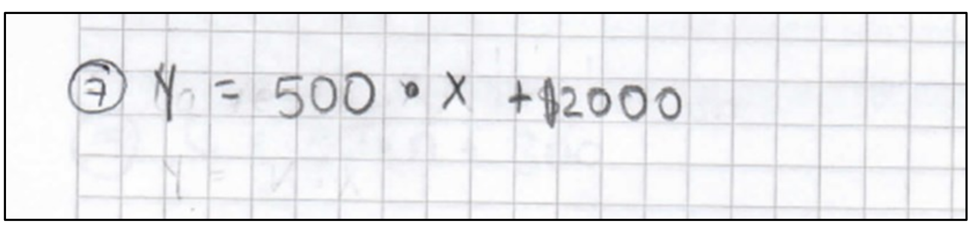
Evidencia de respuesta $P_6T_1S_2$ clasificación T_1



Evidencia de respuesta $P_7T_1S_2$ clasificación T_4



Evidencia de respuesta $P_7T_1S_2$ clasificación T_1



5.2.2 Resultados y análisis de resultados tarea 2

Juan es un taxista que cobra por subir al taxi (banderazo) un costo fijo de $ 400 y $ 80 por cada trayecto de 200 metros recorridos. Si $\boldsymbol{x}$ representa el número de trayectos recorridos, la función que permite determinar el costo de un viaje en el taxi de Juan, es

$$y = f(x) = 80x + 400$$

La tabla 1, representa algunos trayectos recorridos

Tabla 1. Costo del viaje por trayectos

Cantidad de trayectos $(\boldsymbol{x})$	**Costo del viaje $\boldsymbol{f}\ (\boldsymbol{x})$**
0	400
1	480
2	560
3	640

Conteste cada una de las preguntas, de acuerdo con la tabla 1.

1. ¿Qué representa que el costo de un viaje sea de $ 400?

Tabla 37. Tipos de respuestas $P_1T_2S_2$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la actividad de conversión desde el registro tabular, hacia el registro verbal para reconocer, que si $x = 0$, entonces $y = f(0) = 400$.	21	91,1
	Estudiantes que no realizan la actividad de tratamiento en el registro		

T_2	tabular, para reconocer, que si $x = 0$, entonces $y = f(0) = 400$.	2	8,9

2. ¿Cuál es la razón entre el incremento del costo ($) del viaje y cada trayecto recorrido? ¿Qué valor se obtiene? ¿Qué valor representa de la expresión matemática?

Tabla 38. Tipos de respuestas $P_2T_2S_2$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la actividad de tratamiento en el registro tabular, para calcular la constante de proporcionalidad de la función lineal, y contrastarla con la unidad significante de la expresión algebraica.	12	52,1
T_2	Estudiantes que no realizan la actividad de tratamiento en el registro tabular, para calcular la constante de proporcionalidad de la función lineal, y contrastarla con la unidad significante de la expresión algebraica	3	13,2
T_3	Estudiantes que realizan la actividad de tratamiento en el registro simbólico, identificando el valor de k, como el número que multiplica a la variable x.	8	34,7

3. De acuerdo con la función $y = f(x)$ que permite calcular el costo de un viaje en el taxi de Juan, complete los valores de la tabla 2:

Tabla 2. Costo ($) del consumo de agua en metros cúbicos.

$\boldsymbol{x}$	2	4	6	10	20	50	100
$\boldsymbol{y = f\ (x)}$	560	720					

Tabla 39. Tipos de respuestas $P_3T_2S_2$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la actividad de conversión desde el registro algebraico, hacia el registro tabular, para escribir puntos de la forma $(x, y = f(x))$, realizando el proceso de evaluar la función.	18	78,1
T_2	Estudiantes que no realizan la actividad de conversión desde el registro algebraico, hacia el registro tabular, para escribir puntos de la forma $(x, y = f(x))$.	3	13,1
T_3	Estudiantes que realizan la actividad de conversión desde el registro algebraico, hacia el registro tabular, para escribir puntos de la forma $(x, y = f(x))$, sin realizar ningún procedimiento	2	8,8

4. Construya la gráfica que representa la función $y = f(x)$ para $x \in [0, 5]$

Tabla 40. Tipos de respuestas $P_4T_2S_2$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la actividad de conversión desde el registro algebraico o tabular, hacia el registro gráfico, para determinar la clase de recta que se obtiene.	8	34,8
T_2	Estudiantes que realizan la actividad de conversión desde el registro algebraico o tabular, hacia el registro gráfico, para determinar la clase de recta que se obtiene, sin justificar su procedimiento.	3	13,1
	Estudiantes que realizan la actividad de conversión desde el registro		

T_3	algebraico o tabular, hacia el registro gráfico, pero de forma incorrecta.	12	52,1

5. Si el costo de un viaje es de $ 2800, ¿Cuántos trayectos recorrió el taxi? Explique

Tabla 41. Tipos de respuestas $P_5T_2S_2$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la actividad de tratamiento en el registro simbólico, para obtener el valor de la variable x, dado el valor de la variable y, realizando el proceso de despeje.	3	13,1
T_2	Estudiantes que no realizan la actividad de tratamiento en el registro simbólico, para obtener el valor de la variable x, dado el valor de la variable y.	5	21,8
T_3	Estudiantes que realizan la actividad de tratamiento en el registro simbólico, para obtener el valor de la variable x, encontrando por el método del tanteo el valor de 30.	15	65,1

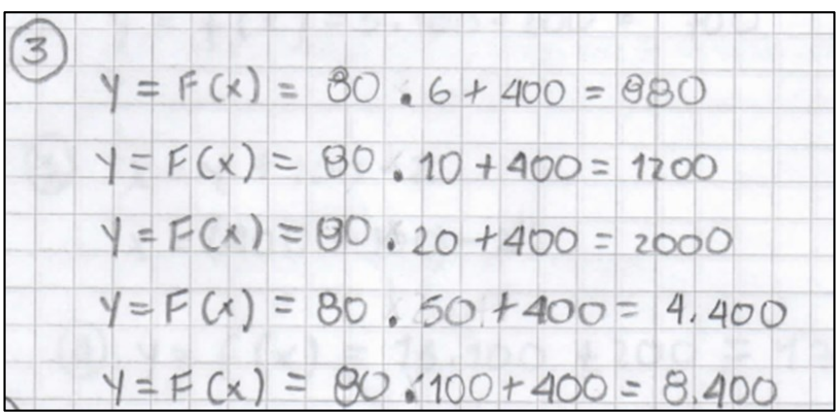
A partir de los datos de las tablas anteriores, se pudo establecer, que aproximadamente el 60 % de los estudiantes encuentran el valor de una variable dada otra (tratamiento en el lenguaje algebraico), a partir del método del tanteo, o de la visualización de los valores en la tabla. Sin embargo, tres estudiantes resolvieron la pregunta realizando el proceso de despeje de la ecuación, pero lo escribieron en un lenguaje verbal. De igual forma, el 50 % de los estudiantes, reconocen la constante de proporcionalidad como la variación entre los incrementos de las variables, lo que les permitió, contrastarla con la antigua constante, y relacionarla como el valor constante en el modelo de función $y = f(x) = kx + b$.

Es pertinente resaltar, que en la representación gráfica del nuevo modelo de función, más del 50 % de los estudiantes, se equivocan en la distribución uniforme del eje de las ordenadas, por lo cual, su representación gráfica no corresponde a la esperada. Asimismo, en esta pregunta, tres estudiantes continúan con el modelo de función $y = f(x) = kx$, lo que implica, que no han reconocido el nuevo modelo de función, que también tiene constante de proporcionalidad, pero una cantidad constante que se adiciona. (…) “la imagen o modelo mental que el estudiante construya es fundamental para poder predecir situaciones o comportamientos futuros en las variables” (Valoyes y Malagón, 2004, p.66).

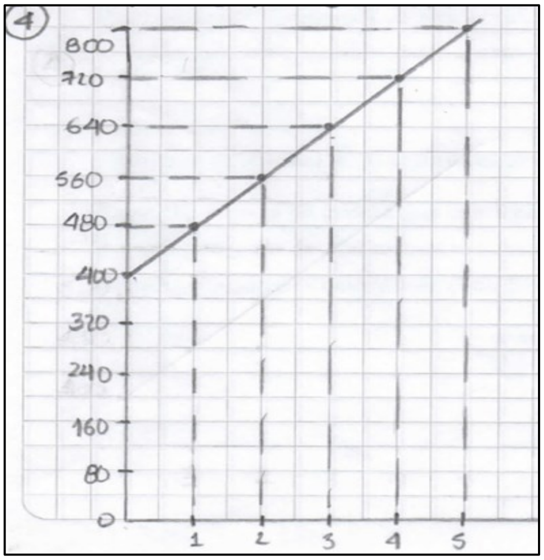
Por otro lado, en la evaluación de la función $y = f(x) = 80x + 400$, aproximadamente el 80 % de los estudiantes, evaluaron la función para distintos valores de x, lo que implica, que su actividad matemática, ha estado marcada por el manejo y tratamiento de expresiones.

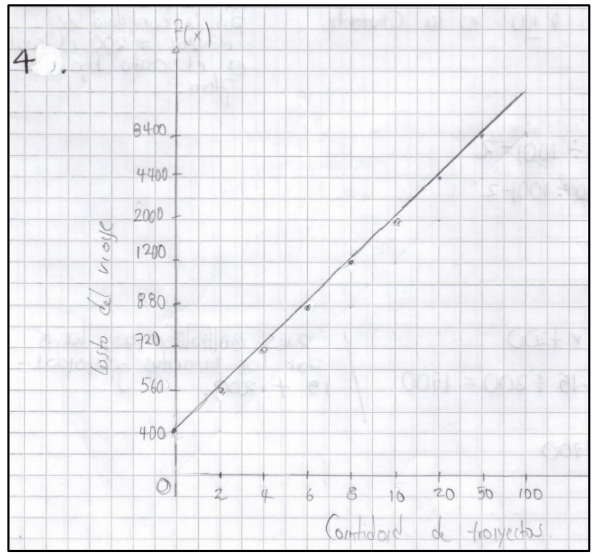
A continuación, se relacionan algunas evidencias de respuestas, dadas por los estudiantes

Evidencia de respuesta $P_3T_2S_2$ clasificación T_1

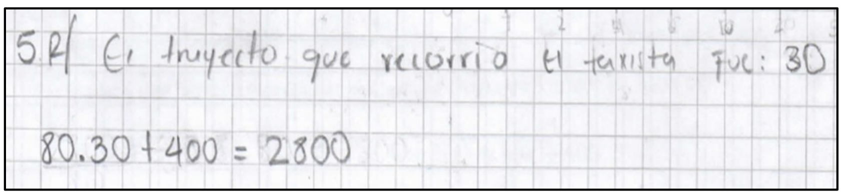

③
$y = F(x) = 80 \cdot 6 + 400 = 880$
$y = F(x) = 80 \cdot 10 + 400 = 1200$
$y = F(x) = 80 \cdot 20 + 400 = 2000$
$y = F(x) = 80 \cdot 50 + 400 = 4.400$
$y = F(x) = 80 \cdot 100 + 400 = 8.400$

Evidencia de respuesta $P_4T_2S_2$ clasificación T_1 y $P_4T_2S_2$ clasificación T_3





Evidencia de respuesta $P_5T_2S_2$ clasificación T_3



5.3 Resultados y análisis de resultados situación 3

5.3.1 Resultados y análisis de resultados tarea 1

Aguas del Valle es una empresa de acueducto que presta el servicio de agua potable al Valle del Cauca. La factura que reciben los usuarios, tiene un cargo básico de $15.000, y cada metro cubico (m^3) consumido en un hogar tiene un costo de $2.000.

La tabla 1, representa la función que permite calcular el costo de una factura, para algunos metros cúbicos consumidos.

Tabla 1. Costo de una factura por cada m^3

Cantidad de metros cúbicos	**Costo ($) de la factura**
0	15.000
2	19.000
4	23.000
10	35.000

Conteste cada una de las preguntas, de acuerdo con la tabla 1.

1. ¿Qué representa que el costo de una factura de un usuario sea de $ 15.000?

Tabla 42. Tipos de respuestas $P_1T_1S_3$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la actividad de conversión desde el registro tabular, hacia el registro verbal, para reconocer que si $x = 0$, entonces $y = f(0) = 15000$.	20	86,8
T_2	Estudiantes que no realizan la actividad de conversión desde el registro tabular, hacia el registro verbal, para reconocer que si $x = 0$, entonces $y = f(0) = 15000$.	3	13,2

2. Represente los datos de la tabla en un plano cartesiano

Tabla 43. Tipos de respuestas $P_2T_1S_3$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la actividad de conversión desde el registro	14	60,9

	tabular, hacia el registro gráfico, para reconocer y contrastar sus unidades significantes.		
T_2	Estudiantes que no realizan la actividad de conversión desde el registro tabular, hacia el registro gráfico, para reconocer y contrastar sus unidades significantes.	9	39,1

3. Si $y = f(x)$ representa la función que permite calcular el ***costo de una factura***, ¿cuál es la expresión matemática de la forma $y = f(x) = k.x + b$, que permite calcular el costo para cualquier cantidad $\boldsymbol{x}$ de metros cúbicos de agua consumidos por un hogar?

Tabla 44. Tipos de respuestas $P_3T_1S_3$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión desde el registro verbal o tabular, hacia el registro simbólico, para reconocer y contrastar sus unidades significantes.	5	21,7
T_2	Estudiantes que no realizan la conversión desde el registro verbal o tabular, hacia el registro simbólico, para reconocer y contrastar sus unidades significantes.	3	13,1
T_3	Estudiantes que no realizan la conversión desde el registro verbal o tabular, pero calculan de forma particular el valor de la función.	15	65,1

4. Si el costo de una factura es de \$ 45.000, ¿Cuántos metros cúbicos de se consumieron?

Tabla 45. Tipos de respuestas $P_4T_1S_3$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la actividad de tratamiento en el registro tabular, para reconocer el valor de la variable independiente, a partir de la extrapolación de datos.	0	0
T_2	Estudiantes que no realizan la actividad de tratamiento en el registro tabular, para reconocer el valor de la variable independiente, a partir de la extrapolación de datos.	3	13,1
T_3	Estudiantes que realizan la actividad de tratamiento en el registro algebraico, para calcular el valor de x, cuando y es 45000, en el modelo de función $y = f(x) = 2000x + 15000$	20	86,9

5. Para 5 metros cúbicos de agua consumidos, ¿cuál es el valor de la factura a cancelar?

Tabla 46. Tipos de respuestas $P_5T_1S_3$

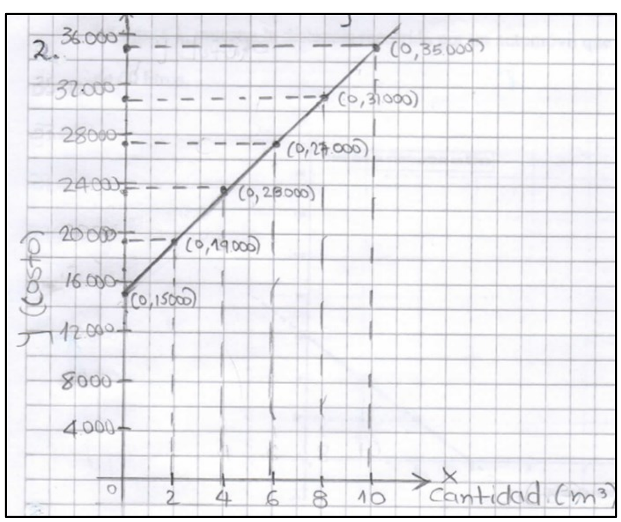
Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la actividad de tratamiento en el registro tabular, para reconocer el valor de la variable independiente, a partir de la interpolación de datos.	0	0
T_2	Estudiantes que no realizan la actividad de tratamiento en el registro tabular, para reconocer el valor de la variable independiente, a partir de la interpolación de datos.	0	0
T_3	Estudiantes que realizan la actividad de tratamiento en el registro algebraico, para calcular el valor de y, cuando x es 5, en el modelo de función $y = f(x) = 2000x + 15000$	23	100

A partir de los datos de las tablas anteriores, se pudo establecer, que en promedio el 90 % de los estudiantes, realizan actividades de tratamiento en el registro numérico, corroborando el análisis de la pregunta 5 de la tarea anterior. De igual forma, en los resultados de las preguntas de esta tarea, se evidenció, que aproximadamente el 80 % de los estudiantes, tienen dificultad para realizar la conversión hacia el registro simbólico. Esto muestra, que este tipo de representación es más complejo, y que su proceso implica preguntas con otro tipo de elementos. En este sentido, Duval (2006), propone que las tareas deben tener una estructura de comparación, de tal modo que se pueda analizar los vínculos entre las posibles variaciones del contenido de las representaciones de los registros puestos en correspondencia.

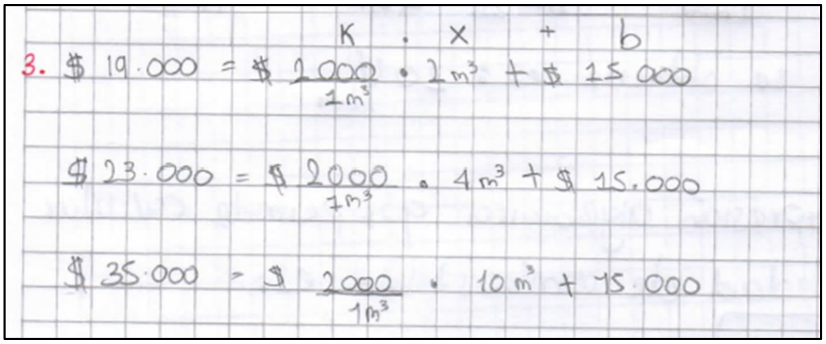
De otro lado, se pudo evidenciar, que aproximadamente el 60 % de los estudiantes, lograron realizar la conversión desde el registro tabular, hacia el registro gráfico, y por ende, favorecer el aprendizaje de la función lineal afín.

A continuación, se relacionan algunas evidencias de respuestas, dadas por los estudiantes.

Evidencia de respuesta $P_2T_1S_3$ clasificación T_1



Evidencia de respuesta $P_3T_1S_3$ clasificación T_3



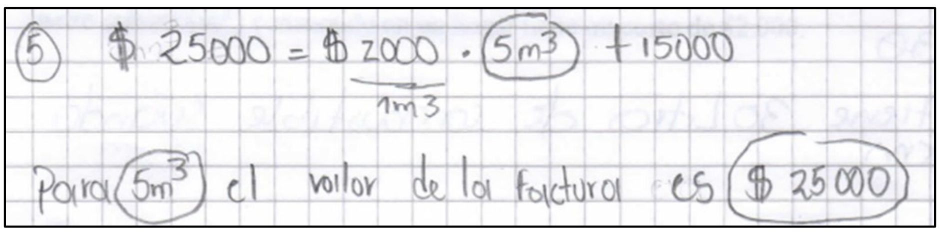
$$K \cdot x + b$$

3. $\$\,19.000 = \$\,\frac{2000}{1m^3} \cdot 2m^3 + \$\,15\,000$

$\$\,23.000 = \$\,\frac{2000}{1m^3} \cdot 4m^3 + \$\,15.000$

$\$\,35.000 = \$\,\frac{2000}{1m^3} \cdot 10\,m^3 + 15.000$

Evidencia de respuesta $P_5T_1S_3$ clasificación T_3



(5) $\$\,25000 = \$\,\frac{2000}{1m^3} \cdot 5m^3 + 15000$

Para 5m³ el valor de la factura es $ 25000

5.3.2 Resultados y análisis de resultados tarea 2

La cantidad de combustible de un vehículo, varía de acuerdo a la distancia recorrida. La figura 1, muestra la distancia recorrida por un automóvil que tiene un tanque con capacidad de 60 litros.

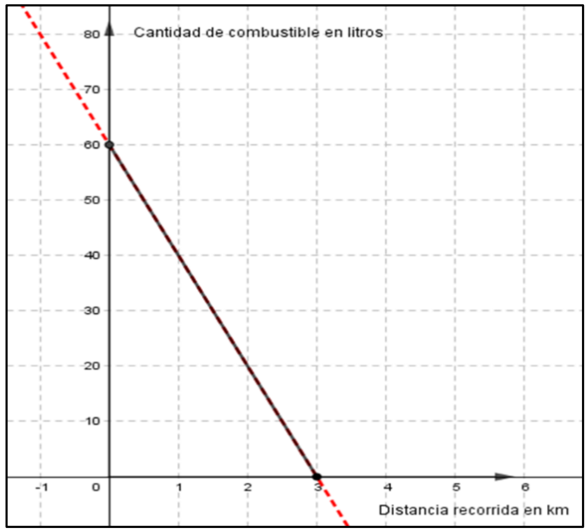


Figura 1. Cantidad de combustible por cada km.

Conteste cada una de las preguntas, de acuerdo con la figura 1.

1. ¿Qué representa en la línea recta, el punto $(0, 60)$ y $(3, 0)$, respectivamente?

Tabla 47. Tipos de respuestas $P_1T_2S_3$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la actividad conversión desde el registro gráfico, hacia el registro verbal, para reconocer los puntos de corte con los ejes de una línea recta.	3	13,1
T_2	Estudiantes que no realizan la actividad conversión desde el registro gráfico, hacia el registro verbal, para reconocer los puntos de corte con los ejes de una línea recta.	14	60.8
T_3	Estudiantes que realizan la actividad conversión desde el registro gráfico, hacia el registro verbal, pero reconocen solamente uno de los puntos de corte de línea recta.	6	26,1

2. Al recorrer 2 km de distancia, ¿Cuánto combustible consume el vehículo?

Tabla 48. Tipos de respuestas $P_2T_2S_3$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la actividad de conversión desde el registro gráfico, hacia el registro numérico, para calcular el valor de la función, cuando el valor de la distancia x es 2 km.	3	13,1
T_2	Estudiantes que no realizan la actividad de conversión desde el registro gráfico, hacia el registro numérico, para calcular el valor de la función, cuando el valor de la distancia x es 2 km.	11	47,8
T_3	Estudiantes que realizan la actividad conversión desde el registro gráfico, hacia el registro verbal, para calcular el valor de la función, cuando el valor de la distancia x es 2 km.	9	39,1

3. ¿Cuál es la razón entre cambio de la cantidad de combustible y la distancia recorrida por el automóvil? ¿Qué valor se obtiene?

Tabla 49. Tipos de respuestas $P_3T_2S_3$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la actividad de conversión desde el registro gráfico, hacia el registro tabular, para determinar la constante de proporcionalidad, que es una unidad significante de la del modelo función $y = f(x) = kx + b, k < 0$	5	21,9
T_2	Estudiantes que no realizan la actividad de conversión desde el registro gráfico, hacia el registro tabular, para determinar la constante de proporcionalidad, que es una	6	26

	unidad significante de la del modelo función $y = f(x) = kx + b, k < 0$		
T_3	Estudiantes que realizan la actividad de conversión desde el registro gráfico, hacia el registro tabular, para determinar la constante de proporcionalidad, pero $k > 0$	12	52,1

4. Si $y = f(x)$ representa la cantidad de combustible y x representa la distancia recorrida por el automóvil, ¿cuál es la expresión algebraica que permite calcular la cantidad de combustible?

Tabla 50. Tipos de respuestas $P_4T_2S_3$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la actividad de conversión desde el registro gráfico, hacia el registro algebraico, y determinan el valor de las unidades significantes k y b.	3	13,1
T_2	Estudiantes que no realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro algebraico, para determinar el valor de las unidades significantes k y b.	17	73,8
T_3	Estudiantes que realizan la actividad de tratamiento en el modelo de función $y = f(x) = kx + b$, cuando x toma los valores de 1 y 2, respectivamente.	3	13,1

5. Si el vehículo recorre una distancia de 1,5 km, ¿Cuánto combustible tiene el vehículo?

Tabla 51. Tipos de respuestas $P_5T_2S_3$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el		

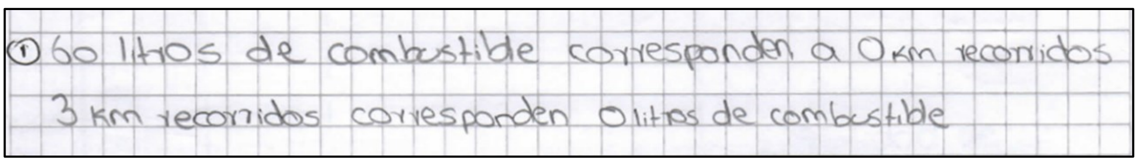
	registro numérico, para calcular el valor de la función, a partir de la interpolación de datos.	6	26,2
T_2	Estudiantes que no realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro numérico, para calcular el valor de la función, a partir de la interpolación de datos.	17	73,8

A partir de los datos de las tablas anteriores, se pudo establecer, que en promedio el 55 % de los estudiantes, no realizan actividades de conversión desde el registro gráfico, hacia el registro tabular o verbal, esto debido a que no relacionaron las unidades significantes entre ambos registros. Esta falta de coordinación entre registros, se pudo evidenciar en la pregunta 4, donde aproximadamente el 80% de los estudiantes tuvieron dificultad para realizar un cambio de registro desde el registro grafico hacia el registro algebraico. Contrastando este resultado con la pregunta 3 de la tarea anterior que exigía el mismo procedimiento, se mantiene la misma cantidad de estudiantes que no realizan la conversión hacia el registro simbólico, a pesar de que ya se han realizado 5 tareas, que están formuladas desde las situaciones problemas como una estrategia de aprendizaje. En este sentido, estos resultados verifican nuevamente la teoría de Duval (2006), quien afirma que la actividad de comprensión es un proceso complejo, que implica una red de discriminantes entre las variables de la función lineal afín, cuyo modelo matemático es $y = f(x) = kx + b$. Las tareas de este tipo de representación, deben permitir el reconocimiento de las variaciones de las representaciones cualitativamente discernibles a la vista.

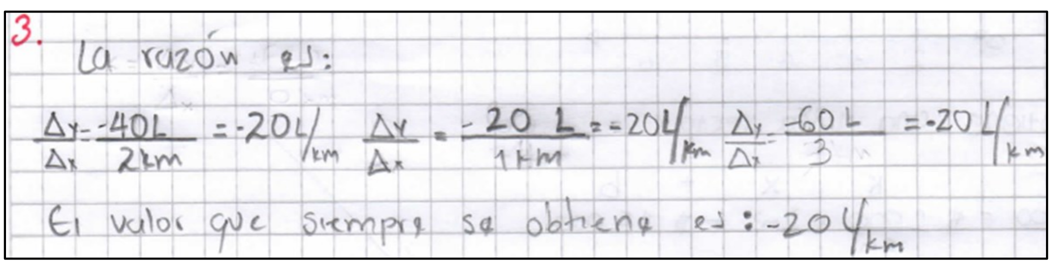
Por otro lado, aproximadamente el 50% de los estudiantes, calcularon la razón de cambio entre las magnitudes, pero no identificaron que este valor era negativo, y esto se debe, a que no relacionaron la unidad significante de las tareas anteriores con el sentido de la recta. De igual forma, el 60 % de los estudiantes no reconocieron en la función lineal afín dada a partir de una representación gráfica, los puntos de corte con los ejes de, lo cual contrasta, con los resultados obtenidos en la tarea anterior, donde se reconocía el punto $(0, b)$ en el modelo de función $y = f(x) = kx + b$ en este mismo tipo de representación. “Un alumno incapaz de discriminar las variables visuales pertinentes de las que no lo son, no puede quedarse más que en una démarche de punteo y en una aprehensión icónica” (Duval, 2006, p.69).

A continuación, se relacionan algunas evidencias de respuestas, dadas por los estudiantes.

Evidencia de respuesta $P_1T_2S_3$ clasificación T_1


① 60 litros de combustible corresponden a 0 km recorridos
3 km recorridos corresponden 0 litros de combustible

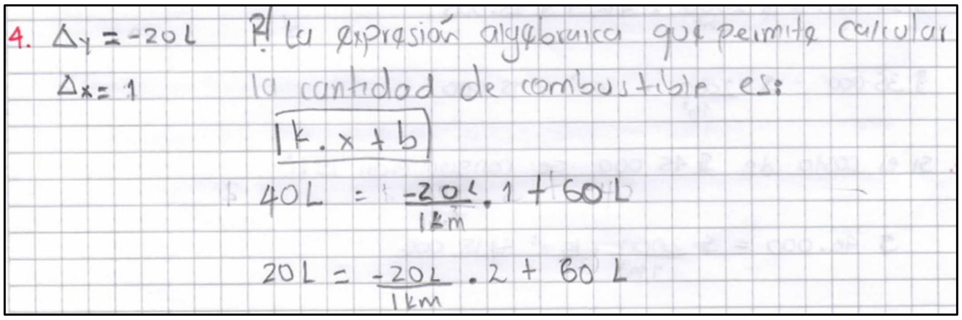
Evidencia de respuesta $P_3T_2S_3$ clasificación T_1


3. La razón es:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-40L}{2km} = -20 L/km$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-20L}{1km} = -20 L/km$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-60L}{3} = -20 L/km$

El valor que siempre se obtiene es: $-20 L/km$

Evidencia de respuesta $P_4T_2S_3$ clasificación T_3



5.4 Resultados y análisis de resultados situación 4

5.4.1 Resultados y análisis de resultados tarea 1

Ingrese al link https://www.geogebra.org/materials/**.** Busque el archivo Función lineal 1 de Diego Solarte Pabón, y descárguelo. Abra el archivo y verifique que su interfaz aparezca como en la figura 1. Mueva el deslizador k, $(-5 < k < 5, k\ un\ número\ real)$ y verifique que la función cambia gráficamente y algebraicamente.

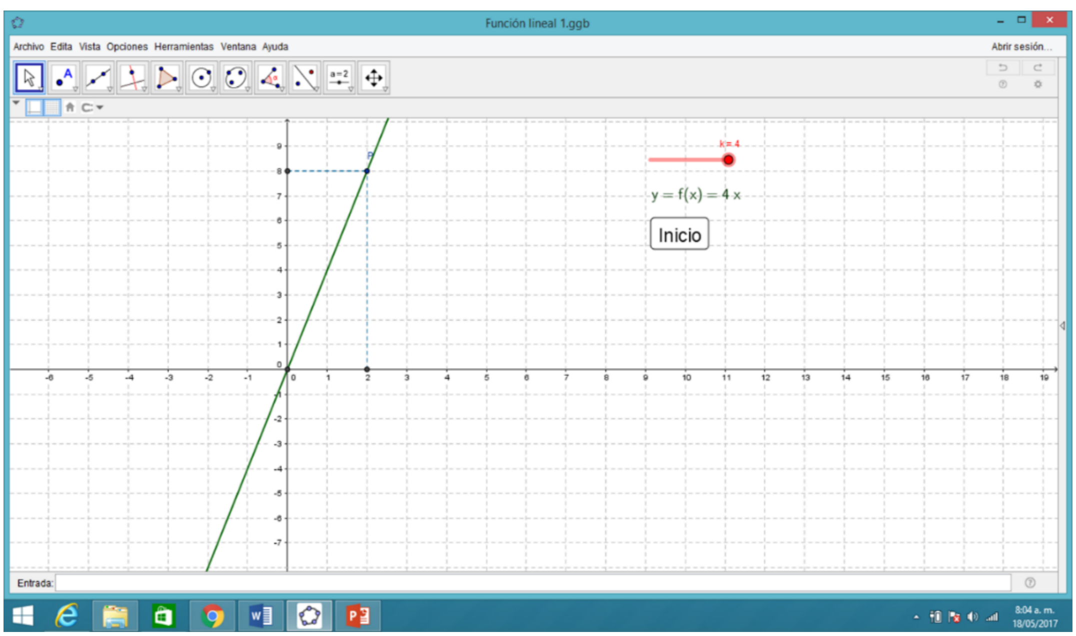


Figura 1: Interfaz del archivo de GeoGebra Función lineal 1 de Diego Solarte Pabón

Conteste cada una de las preguntas, justificando con los procedimientos correspondientes.

1. Mueva el deslizador de tal forma que $k = 2$. Ubique el punto P de la función, de tal forma que asigne distintos valores en el plano cartesiano. Complete los valores de la tabla:

Valor de x	**Valor de $y = f(x)$**	**P (x, y)**
-2	-4	$(2, 4)$
-1		
0		
1		
2		
3		

Tabla 52. Tipos de respuestas $P_1T_1S_4$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro tabular, para calcular el valor de la función, a partir de valores de x.	20	86,8
T_2	Estudiantes que no realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro tabular, para calcular el valor de la función, a partir de valores de x, pero se equivocan en el punto (0, 0)	3	13,2

2. Mueva el deslizador de tal forma que k sea equivalente a -1, 1, -3 y 3, respectivamente. Complete los valores de la tabla:

Valor de k	**Representación algebraica de la función**	**Representación gráfica de la función**
$k = -1$		
$k = 1$		
$k = -3$		
$k = 3$		

Tabla 53. Tipos de respuestas $P_2T_1S_4$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro algebraico, para determinar sus unidades significantes.	20	86,8
T_2	Estudiantes que no realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro algebraico, para determinar sus unidades significantes.	3	13,2

3. ¿Qué conclusión obtienes a partir de la información de la tabla anterior

Tabla 54. Tipos de respuestas $P_3T_1S_4$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro verbal, para explicar las características de la función lineal, a partir de sus unidades significantes.	20	100
T_2	Estudiantes que no realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro verbal, para explicar las características de la función lineal, a partir de sus unidades significantes.	0	0

4. Utilizando transportador, mide el ángulo que se forma entre la función $y = f(x)$ y el eje x (Eje de las abscisas), cuando k es 1 y 3, respectivamente. ¿Representan la misma función?, justifique su respuesta.

Tabla 55. Tipos de respuestas $P_4T_1S_4$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro numérico, para calcular el valor del ángulo que se forma entre el eje x, y el trazo de la línea, y relacionarlo con el valor de k.	12	52,1
T_2	Estudiantes que no realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro numérico, para calcular el valor del ángulo que se forma entre el eje x, y el trazo de la línea.	8	34,7
T_3	Estudiantes que realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro numérico, para calcular el valor del ángulo que se forma entre el	3	13,2

	eje x, y el trazo de la línea, pero lo relacionan de forma incorrecta con k.		

5. Dadas las funciones de la figura 2, ¿cuál tiene constante $k = 1$ o $k > 1$?, justifique.

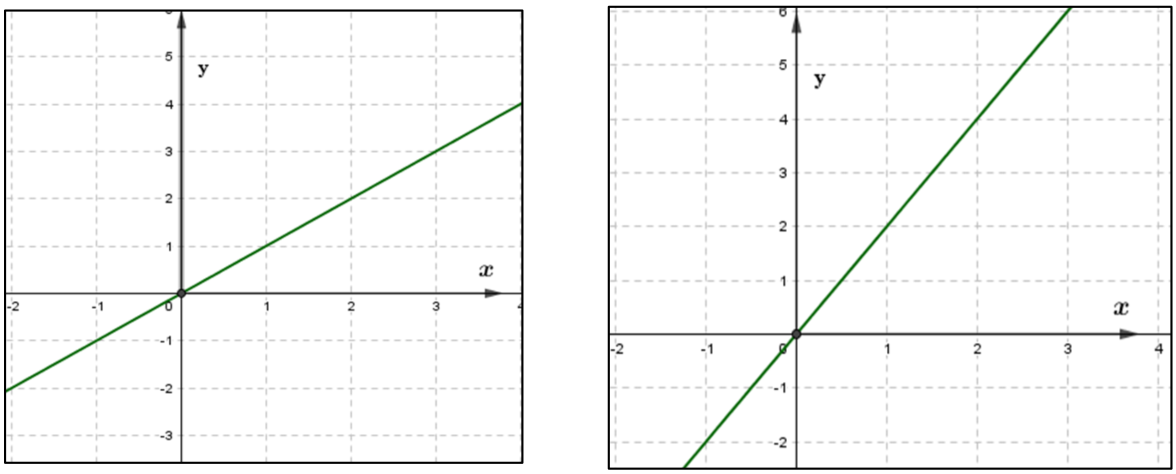


Figura 2: Función lineal de la forma $y = f(x) = k.x$

Tabla 56. Tipos de respuestas $P_5T_1S_4$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro numérico, para determinar variaciones de la unidad significante k.	15	65,1
T_2	Estudiantes que no realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro numérico, para determinar variaciones de la unidad significante k.	8	34,9

6. Dadas las funciones de la figura 3, ¿cuál tiene constante positiva o negativa, es decir, $k > 0$ o $k < 0$?, justifique.

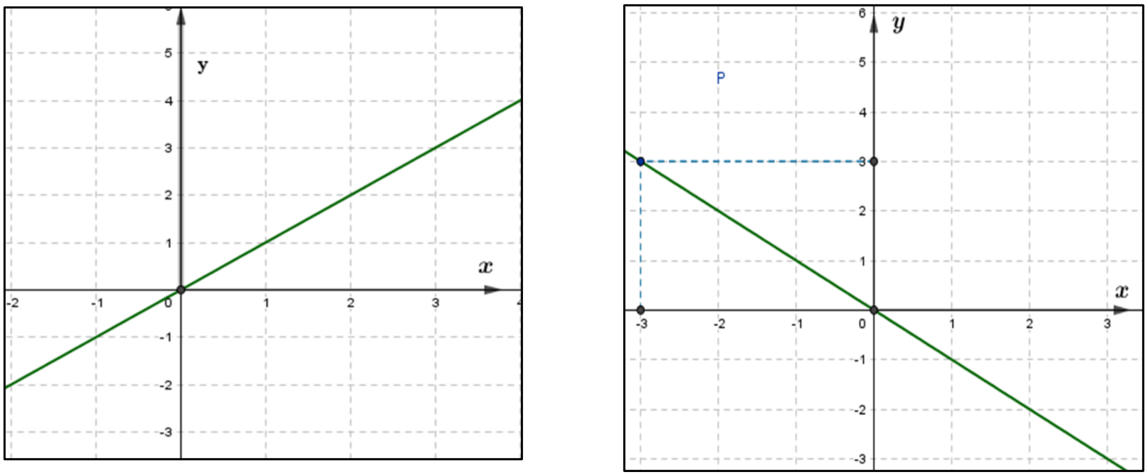


Figura 3: Función lineal de la forma $y = f(x) = k.x$

Tabla 57. Tipos de respuestas $P_6T_1S_4$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro numérico, para determinar variaciones de la unidad significante k.	18	78,1
T_2	Estudiantes que no realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro numérico, para determinar variaciones de la unidad significante k.	5	21,9

7. Escriba dos conclusiones (características) de las funciones trabajadas anteriormente.

Tabla 58. Tipos de respuestas $P_7T_1S_4$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro verbal, para explicar las características de la función lineal, a partir de sus unidades significantes.	9	39,1
	Estudiantes que no realizan la conversión desde el registro gráfico,	2	8,7

T_2	hacia el registro verbal, para explicar las características de la función lineal, a partir de sus unidades significantes.		
T_3	Estudiantes que realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro verbal, para explicar las características de la función lineal, a partir de $k > 0$ o $k < 0$	12	52,2

A partir de los datos de las tablas anteriores, se pudo establecer, que aproximadamente el 85 % de los estudiantes, realizan actividades de conversión desde el registro gráfico, hacia el registro algebraico, para representar a través de una fórmula matemática, el modelo de función $y = f(x) = kx$. Esto implica, que los estudiantes realizaron, la generalización del concepto trabajado, y por ende, les permitieron contrastar los resultados de los elementos que constituyen este modelo de función, cuando existe una coordinación entre los registros gráfico y algebraico. Este resultado, contrasta con el que se obtuvo en la pregunta 7 de la tarea 2 de la situación 1 ($P_7T_2S_1$), donde el resultado para cambiar de registro bajo condiciones similares, fue de 26 %. Por otro lado, en la pregunta 5 el 65 % de los estudiantes reconocieron las unidades significantes de la función $y = f(x) = kx$, exactamente cuando $k = 1$ y $k > 1$, respectivamente. Este porcentaje, se debe a que la pregunta propuesta, exige un reconocimiento cualitativo de la unidad significante de la función, es decir, en la representación gráfica, se ejecutaron variaciones sobre el valor de k, para realizar valores de oposición entre dichas representaciones, de tal forma que los estudiantes comprendan la coordinación entre los registros trabajados (Duval, 2001).

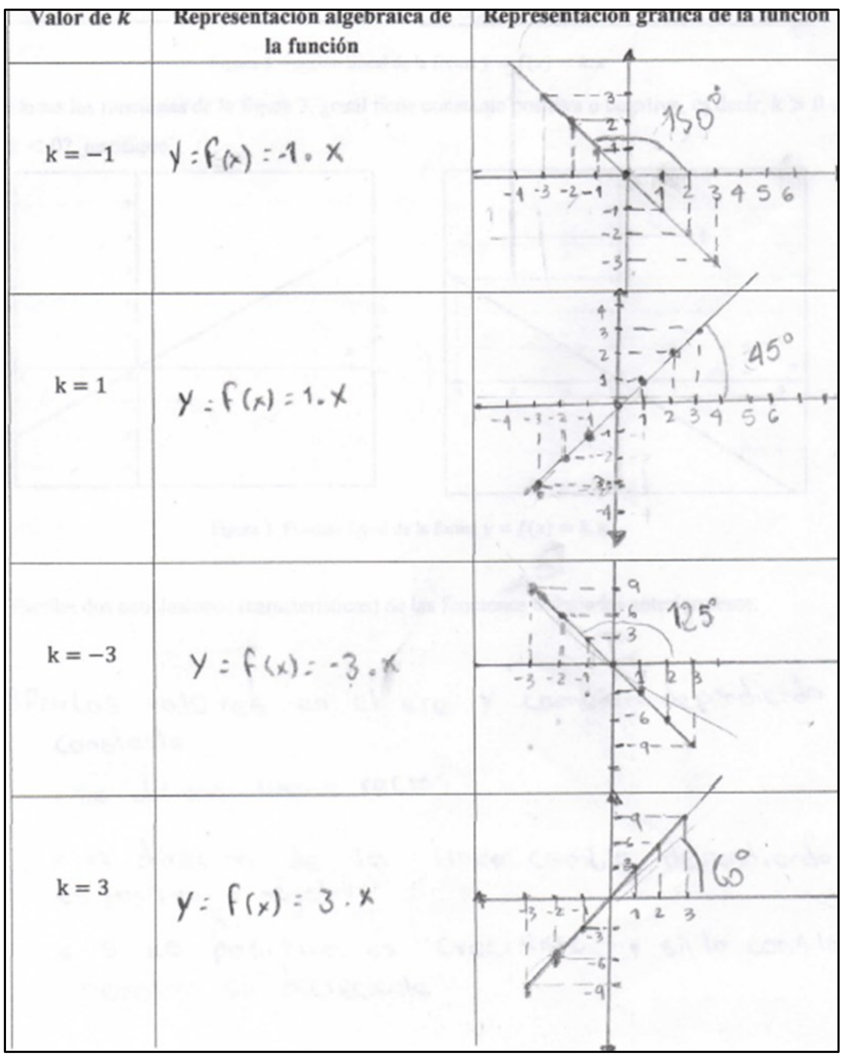
En el mismo sentido de la pregunta anterior, los resultados de la pregunta 6, muestran que aproximadamente el 75 % de los estudiantes, reconocen unidades significantes de la representación gráfica, y las relacionan con los valores de las constantes en las expresiones

$y = f(x) = kx$, concluyendo para los estudiantes, que si $k < 0$, la línea recta es decreciente o abre hacia la izquierda del origen de coordenadas.

Es relevante señalar que en la pregunta 3, los estudiantes realizaron el 100 % la actividad de conversión entre los registros propuestos, lo que sirvió de base, para obtener los resultados de las preguntas mencionadas anteriormente, es decir, para realizar la generalización del modelo de función $y = f(x) = kx$.

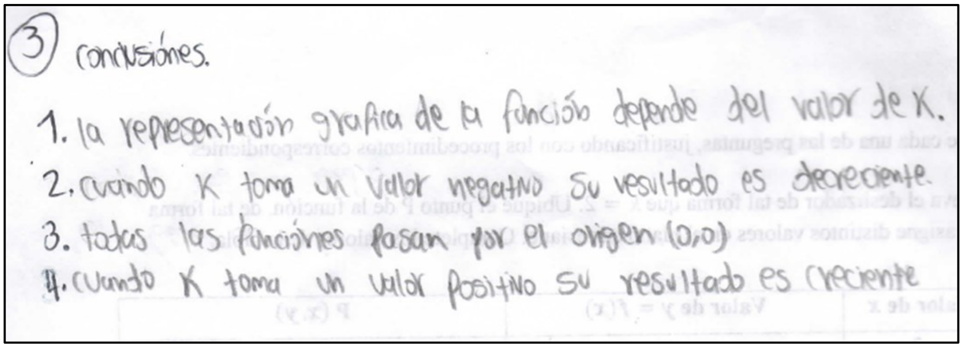
A continuación, se relacionan algunas evidencias de respuestas, dadas por los estudiantes.

Evidencia de respuesta $P_2T_1S_4$ clasificación T_1



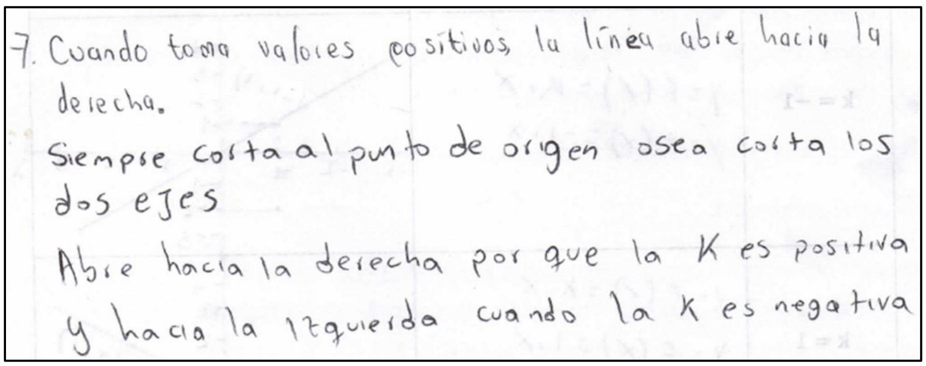
Valor de k	Representación algebraica de la función	Representación gráfica de la función
$k = -1$	y : f(x) : -1 . x	150°
$k = 1$	y : f(x) : 1 . x	45°
$k = -3$	y : f(x) : -3 . x	125°
$k = 3$	y : f(x) : 3 . x	60°

Evidencia de respuesta $P_3T_1S_4$ clasificación T_1


3 conclusiónes.

1. la representación grafica de la función depende del valor de K.
2. cuando K toma un valor negativo su resultado es decreciente.
3. todas las funciónes pasan por el origen (0,0)
4. cuando K toma un valor positivo su resultado es creciente

Evidencia de respuesta $P_7T_1S_4$ clasificación T_1


7. Cuando toma valores positivos la línea abre hacia la derecha.

Siempre corta al punto de origen osea corta los dos ejes

Abre hacia la derecha por que la K es positiva y hacia la izquierda cuando la K es negativa

5.4.2 Resultados y análisis de resultados tarea 2

Ingrese al link https://www.geogebra.org/materials/**.** Busque el archivo Función lineal 2 de Diego Solarte Pabón, y descárguelo. Abra el archivo y verifique que su interfaz aparezca como en la figura 4. Mueva el deslizador k, $(-3 < k < 4, k\ un\ número\ real)$ y verifique que la función cambia gráficamente y algebraicamente.

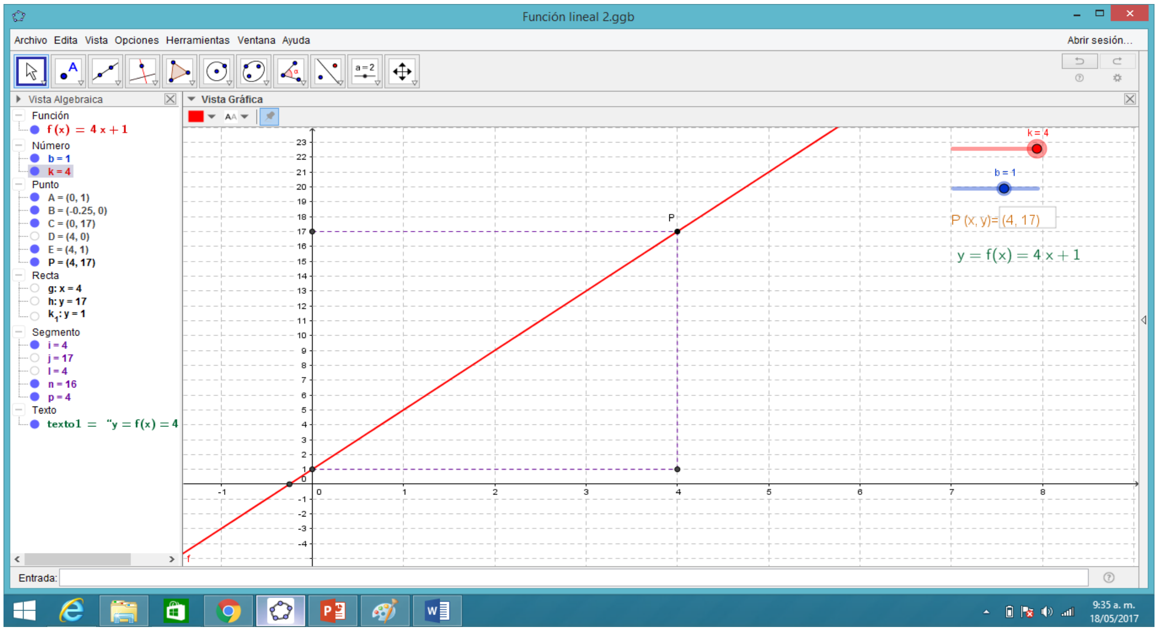


Figura 4: Interfaz del archivo de GeoGebra Función lineal 2 de Diego Solarte Pabón

Conteste cada una de las preguntas, justificando con los procedimientos correspondientes.

1. Mueva el deslizador k, de tal forma que $k = 2$. Mueva el valor de b $(-4 < b < 5)$, y complete los valores de la tabla:

Valor de *b*	**Representación algebraica de la función**	**Representación gráfica de la función**
$b = -3$		
$b = -1$		
$b = 0$		

$b = 2$

Tabla 59. Tipos de respuestas $P_1 T_2 S_4$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro algebraico (en tres o cuatro funciones), para contrastar sus unidades significantes.	8	34,8
T_2	Estudiantes que realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro algebraico (en una o dos funciones), para contrastar sus unidades significantes.	12	52,1
T_3	Estudiantes que no realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro algebraico, para contrastar sus unidades significantes.	3	13,1

2. Represente en un mismo plano cartesiano las funciones de la tabla.

Tabla 60. Tipos de respuestas $P_2 T_2 S_4$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión desde el registro algebraico, hacia el registro gráfico, para contrastar sus unidades significantes.	3	13,1
T_2	Estudiantes que no realizan la conversión desde el registro algebraico, hacia el registro gráfico,	20	86,9

	para contrastar sus unidades significantes.		

3. ¿Qué representa el valor de b en la familia de funciones $y = f(x) = 2.x + b$?

Tabla 61. Tipos de respuestas $P_3T_2S_4$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión desde el registro algebraico, hacia el registro verbal, para justificar el valor de b, en el modelo matemático de función $y = f(x) = kx + b$, cuando pasa por el origen, por encima del origen o pasa por debajo del origen de coordenadas.	15	65,1
T_2	Estudiantes que no realizan la conversión desde el registro algebraico, hacia el registro verbal, para justificar el valor de b, en el modelo matemático de función $y = f(x) = kx + b$, cuando pasa por el origen, por encima del origen o pasa por debajo del origen de coordenadas.	8	34,9

4. Mueva los deslizadores k y b, de tal forma que tomen los valores asignados. Mueva el punto P sobre la función, y complete los valores de la tabla:

Valores de k y b	**Expresión algebraica de la forma $\boldsymbol{y = f(x) = kx + b}$**	**Punto de corte con el eje x**	**Punto de corte con el eje y**
$k = 1$ $b = -2$			
$k = 0$			

	$b = 3$
	$k = -4$ $b = 0$
	$k = -2$ $b = 4$

Tabla 62. Tipos de respuestas $P_4T_2S_4$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión, desde el registro gráfico, hacia el registro tabular, para calcular los puntos de corte de la línea recta con los ejes de coordenadas, en tres o cuatro funciones.	12	52,1
T_2	Estudiantes que realizan la conversión, desde el registro gráfico, hacia el registro tabular, para calcular los puntos de corte de la línea recta con los ejes de coordenadas, en dos funciones.	6	26,1
T_3	Estudiantes que no realizan la conversión, desde el registro gráfico, hacia el registro tabular, para calcular los puntos de corte de la línea recta con los ejes de coordenadas.	5	21,8

5. ¿Qué sucede cuando la línea recta corta al eje $\boldsymbol{x}$, y al eje $\boldsymbol{y}$, respectivamente? Explique

Tabla 63. Tipos de respuestas $P_5T_2S_4$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión, desde el registro gráfico, hacia el		

	registro verbal, para explicar, qué ocurre en los puntos de intersección con los ejes de coordenadas.	12	52,1
T_2	Estudiantes que no realizan la conversión, desde el registro gráfico, hacia el registro verbal, para explicar, qué ocurre en los puntos de intersección con los ejes de coordenadas.	11	47,9

6. En la función, $\boldsymbol{y = f(x) = -5x + 2}$**,** en ¿qué punto la gráfica que la representa, corta al eje $\boldsymbol{x}$ y al eje $\boldsymbol{y}$**,** respectivamente?

Tabla 64. Tipos de respuestas $P_6T_2S_4$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión, desde el registro simbólico, hacia el registro numérico, para determinar puntos, que tienen la forma $(x, 0)$ y $(0, y)$	0	0
T_2	Estudiantes que realizan la conversión, desde el registro simbólico, hacia el registro numérico, para determinar el corte con el eje y $(0, y)$	18	78,3
T_3	Estudiantes que no realizan la conversión, desde el registro simbólico, hacia el registro numérico, para determinar el corte con el eje puntos, que tienen la forma $(x, 0)$ y $(0, y)$	5	21,7

7. Dadas las gráficas de la figura 5, ¿cuál es la expresión algebraica que representa cada gráfica de la función? Explique

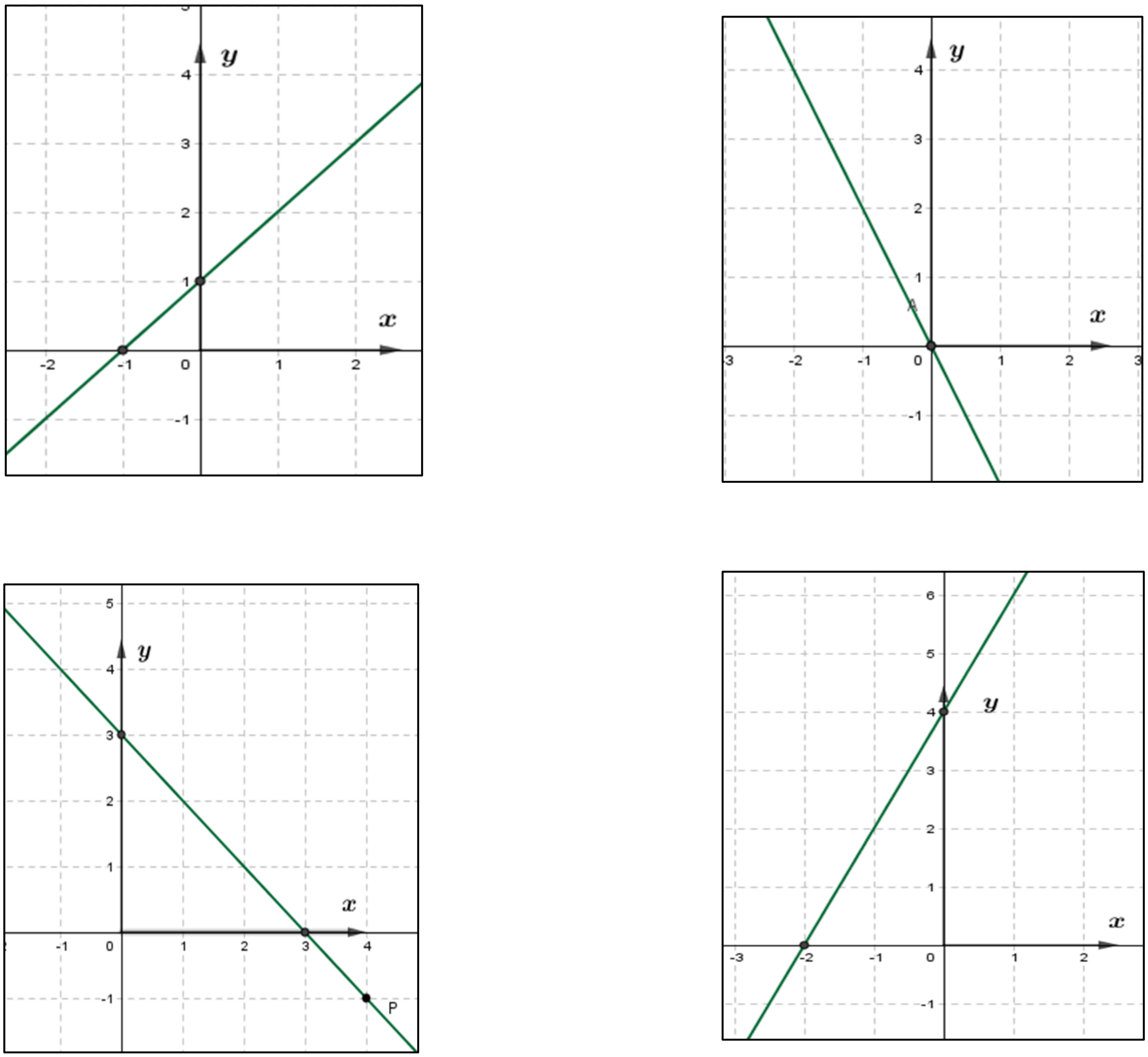


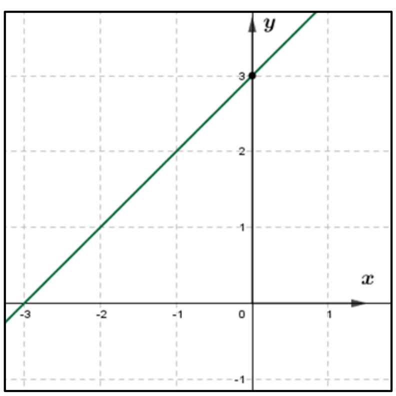
Figura 5: Representación gráfica de una función lineal $y = kx + b$

Tabla 65. Tipos de respuestas $P_7T_2S_4$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión, desde el registro gráfico, hacia el registro algebraico (en tres funciones), para calcular la expresión algebraica	6	26,1

	del modelo de función $y = f(x) = kx + b$.		
T_2	Estudiantes que realizan la conversión, desde el registro gráfico, hacia el registro algebraico (en una o dos funciones), para calcular la expresión algebraica del modelo de función $y = f(x) = kx + b$.	3	13,1
T_3	Estudiantes que no realizan la conversión, desde el registro gráfico, hacia el registro algebraico, para calcular la expresión algebraica del modelo de función $y = f(x) = kx + b$.	14	60,8

8. Complete los valores de la tabla, teniendo en cuenta la representación inicial y la representación final de cada función.

Representación inicial	Representación final
	
$y = f(x) = -4x$	

$y = f(x) =$

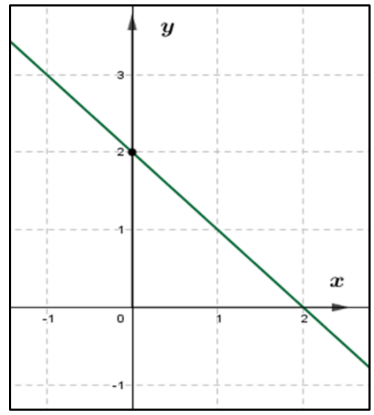


Tabla 66. Tipos de respuestas $P_8T_2S_4$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro algebraico, o viceversa (en dos o tres funciones), para contrastar sus unidades significantes.	8	34,7
T_2	Estudiantes que realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro algebraico, o viceversa (en una función), para contrastar sus unidades significantes.	9	39,1
T_3	Estudiantes que no realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro algebraico, o viceversa, para contrastar sus unidades significantes.	6	26,2

9. Las gráficas de la figura 6, representan una función de la forma $y = kx + b$. En ¿cuál de las dos gráficas, el valor de $b = 0$? Justifique

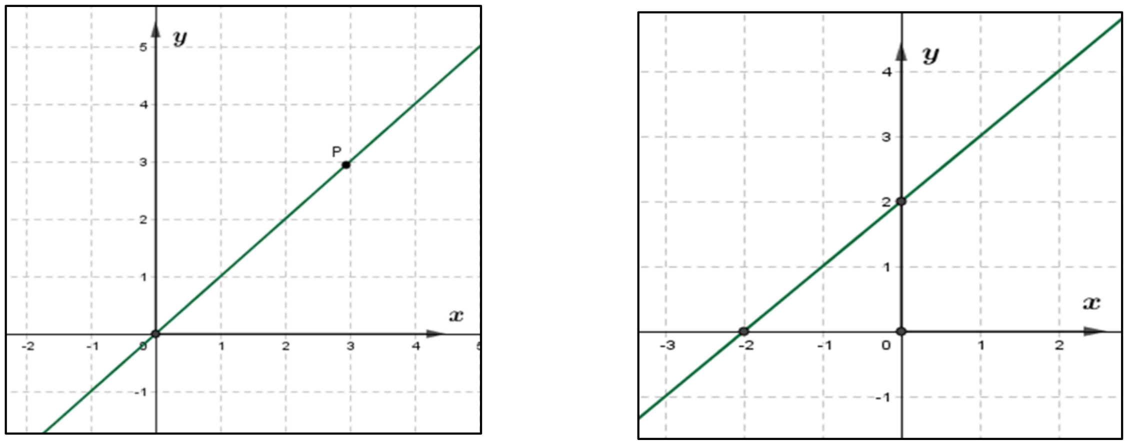
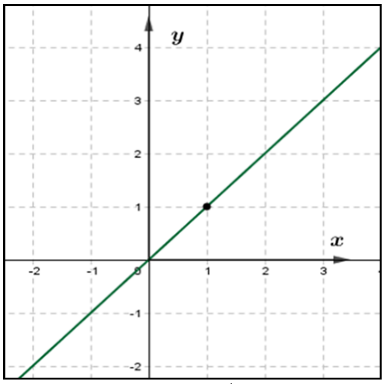


Figura 6. Representación gráfica de la función $y = kx + b$

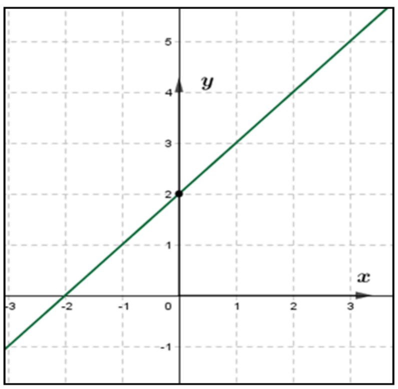
Tabla 67. Tipos de respuestas $P_9T_2S_4$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro verbal, para justificar el punto por donde pasa la recta pasa: por el origen, por encima del origen o por debajo del origen	18	78,1
T_2	Estudiantes que realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro verbal, justificando que corta al eje y.	3	13,1
T_3	Estudiantes que realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro verbal, para justificar el punto por donde pasa la recta pasa: por el origen, por encima del origen o por debajo del origen, sin realizar ningún procedimiento.	2	8,8

10. Para cada una de las funciones de la figura 7, se realizan variaciones del contenido que las representan. Escribir la representación (grafica o expresión algebraica), según convenga



$y = f(x) =$



$y = f(x) =$

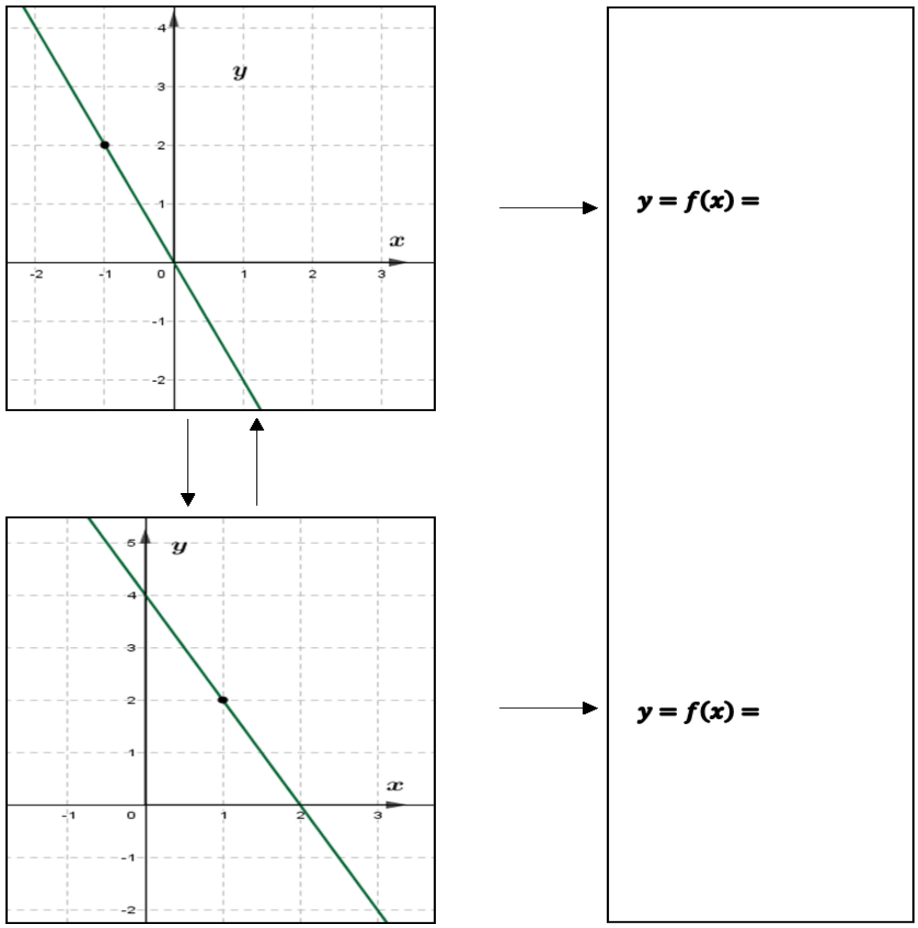


Tabla 68. Tipos de respuestas $P_{10}T_2S_4$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
T_1	Estudiantes que realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro algebraico, o viceversa (en las dos funciones), para analizar los vínculos entre las posibles variaciones del contenido de las representaciones.	6	26
T_2	Estudiantes que realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro algebraico, o viceversa (en una función), para analizar los vínculos entre las posibles variaciones del contenido de las representaciones.	6	26
T_3	Estudiantes que no realizan la conversión desde el registro gráfico,	11	48

	hacia el registro algebraico, o viceversa, para analizar los vínculos entre las posibles variaciones del contenido de las representaciones.	

A partir de los datos de las tablas anteriores, se pudo establecer, que aproximadamente el 50 % de los estudiantes, realizan actividades de conversión desde el registro gráfico, hacia el registro algebraico, donde realizaron modificaciones a las condiciones iniciales, para obtener como resultado el modelo de función $y = f(x) = kx$ o $y = f(x) = kx + b$. Es de resaltar, que en este tipo de representación, los estudiantes realizaron con mayor facilidad la conversión en las funciones propuestas, cuando el valor de k es 1, es decir, cuando las razones entre los incrementos de las variables y y x, eran iguales. De igual forma, en el reconocimiento de la unidad significante b, en el modelo de función $y = f(x) = kx + b$, aproximadamente el 75 % de los estudiantes, reconocen que es una constante en la representación algebraica, que representa el corte con el eje de las ordenadas.

Los resultados de la pregunta 8, muestran que aproximadamente el 70 % de los estudiantes, realizan la conversión desde el registro gráfico, hacia el registro algebraico, o viceversa, al menos en una de las tres funciones lineales propuestas. Solo la mitad de este porcentaje, realizaron la actividad completa, lo que indica que, (…) “uno de los problemas específicos del aprendizaje es hacer pasar a los alumnos de una aprehensión local e icónica a una aprehensión global cualitativa” (Duval, 2001, p.66)

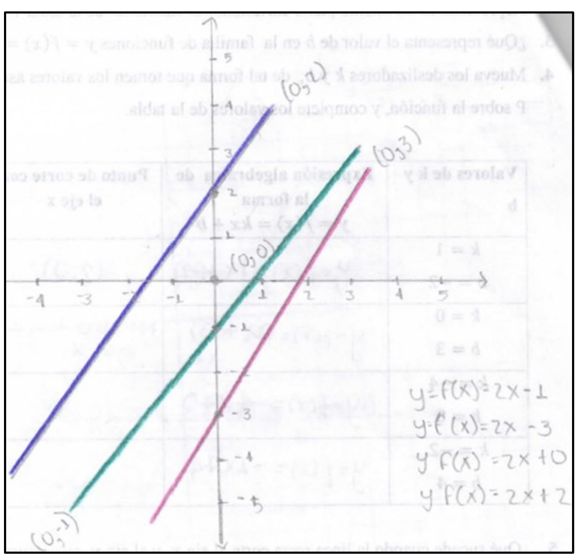
Por otro lado, en los resultados de la pregunta 10, aproximadamente el 50 % de los estudiantes (resolvieron al menos una pregunta de las dos propuestas), realizaron una comparación entre los registros gráfico y algebraico, que permitió analizar los vínculos entre las posibles variaciones del contenido de la representación de los registros puestos en correspondencia. Es decir, en las variaciones del contenido de un gráfico a otro, los estudiantes relacionaron el cambio de variable visual, por ejemplo, en un gráfico, la línea pasa por el origen de coordenadas, lo que implica que $b = 0$, pero en su variación, la línea pasa por encima del eje de coordenadas, y por ende, $b \neq 0$.

Para concluir este análisis de resultados, es relevante decir que:

> Este tipo de tarea es necesaria para aprender a diferenciar dos representaciones donde los contenidos presentan, a primera vista, poca diferencia pero representan dos objetos matemáticos distintos y da la posibilidad de una verdadera exploración experimental de las variaciones utilizadas a menudo en matemáticas, y por lo tanto permite a su vez una coordinación de los distintos registros que se construyen "en la cabeza" de los alumnos. Esta coordinación no solo permite a los alumnos cambiar de registro y controlar ellos mismos su pertinencia, sino también acceder a una verdadera comprensión conceptual (Duval, 2006, p. 162)

A continuación, se relacionan algunas evidencias de respuestas, dadas por los estudiantes.

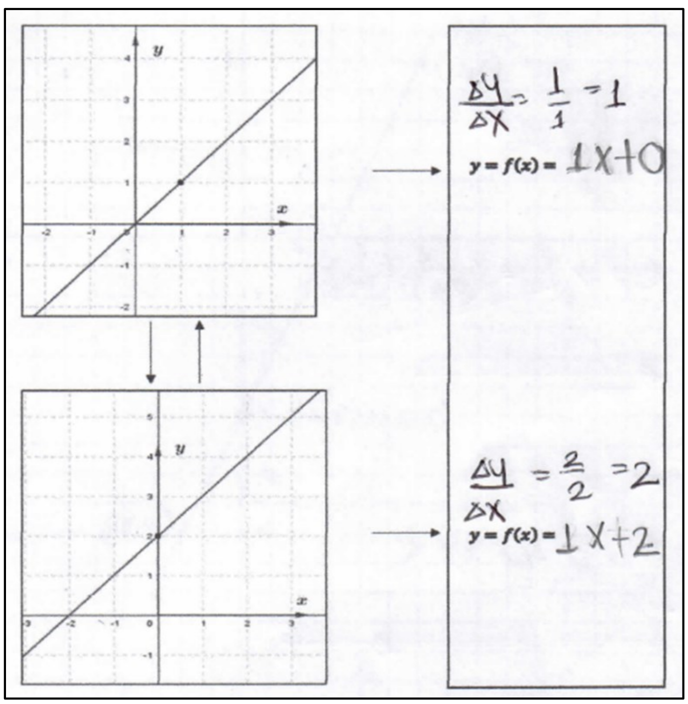
Evidencia de respuesta $P_2T_2S_4$ clasificación T_2



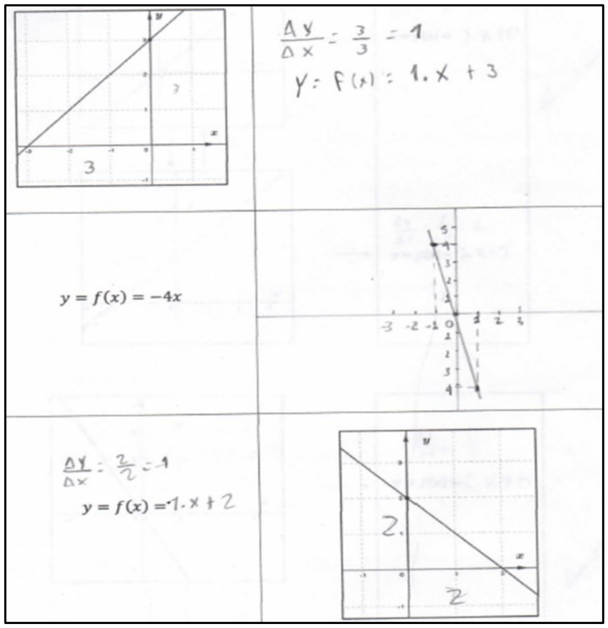
Evidencia de respuesta $P_4T_2S_4$ clasificación T_1

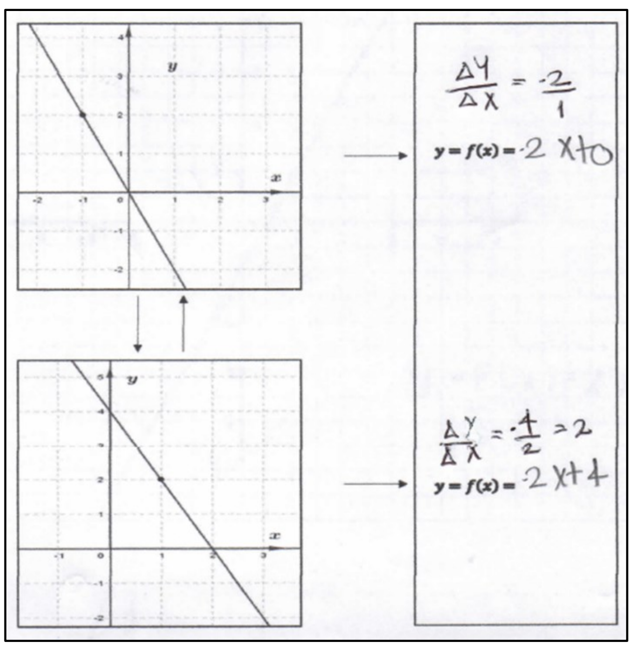
Valores de k y b	Expresión algebraica de la forma $y = f(x) = kx + b$	Punto de corte con el eje x	Punto de corte con el eje y
$k = 1$ $b = -2$	y=f(x) = 1.x - 2	(2,0)	(0,-2)
$k = 0$ $b = 3$	y= f(x) = 0.x+3	No corta	(0,3)
$k = -4$ $b = 0$	y= f(x) -4.x +0	(0,0)	(0,0)
$k = -2$ $b = 4$	y= f(x) -2.x +4	(+2,0)	(0,4)

Evidencia de respuesta $P_8T_2S_4$ clasificación T_1



Evidencia de respuesta $P_{10}T_2S_4$ clasificación T_1


Δy/Δx = 3/3 = 1
y = f(x) = 1.x + 3
3
y = f(x) = −4x
Δy/Δx = 2/2 = -1
y = f(x) = -1.x + 2
2
2


Δy/ΔX = -2/1
y = f(x) = -2 X+0
Δy/ΔX = -4/2 = 2
y = f(x) = -2 X+4

6. Conclusiones generales y algunas reflexiones

En este capítulo, se describen las conclusiones generales de este trabajo, a partir de cada uno de los objetivos planteados, y de los análisis de los resultados de la propuesta implementada con los estudiantes de grado 10° de la Institución Educativa Técnico de Comercio Santa Cecilia de la ciudad de Cali. De igual forma, se realizan algunas reflexiones de acerca del proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de función lineal y afín, teniendo en cuenta el marco teórico de la investigación, y algunos referentes de la educación matemática.

6.1 Conclusiones generales

En cuanto al objetivo específico 1, a partir del cual se elaboró la propuesta de aula, conformada por cuatro situaciones problemas, que contiene modelos de variación lineal entre dos magnitudes variables, que permitieron realizar transformaciones (tratamientos y conversiones) entre los distintos registros de representación, para obtener los modelos de las funciones $y = f(x) = kx$ y $y = f(x) = kx + b$, se concluye que:

El diseño de las situaciones problema relativas al tema de investigación, implicó reconocer algunos referentes teóricos dados por el MEN, particularmente la modelación, y el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, la teoría de las situaciones problema de Obando y Munera (2003), que justifica el diseño y la implementación en el aula, y la teoría de las representaciones semióticas de Duval, permitieron realizar un acercamiento al proceso de enseñanza y aprendizaje de este concepto de función lineal y afín, diferente al que se realiza en otros escenarios, donde existe la linealidad de transmitir conceptos matemáticos del profesor al estudiante.

Las situaciones problema como estrategia metodológica, permitió que los estudiantes a través de la modelación, reconocieran las unidades significantes de cada una de las funciones trabajadas, para así, establecer los modelos matemáticos mencionados anteriormente. En este sentido, los estudiantes reconocieron, que la función $y = f(x) = kx$, pasa por el origen de coordenadas, y su representación gráfica, es una línea recta que abre hacia la izquierda, la derecha, o es una línea paralela al eje x. De igual forma, las preguntas de cada una de las tareas de las situaciones, intentaron acercar a los estudiantes a la coordinación entre los registros de representación gráfica y algebraica de la función $y = f(x) = kx + b$. Es decir, la puesta en correspondencia entre dos registros de representación, permitió a los estudiantes desarrollar su actividad matemática, a partir de predicciones, procedimientos numéricos, contraste, y validación de resultados.

La situación problema planteada e implementada a partir del software GeoGebra, permitió evidenciar mejores resultados en los estudiantes, comparados con los realizados a lápiz y papel. Es decir, a través de la visualización y de la modelación, en las variaciones de los registros de representación gráfico y algebraico, los estudiantes establecieron las relaciones correspondientes entre ellos, y por ende la validación de los conceptos trabajados, que luego les servía para establecer hipótesis de aprendizaje referentes a la función lineal y afín.

En cuanto al objetivo específico 2, a partir del cual se caracterizó algunos aspectos del concepto de función lineal y afín, según las producciones de un grupo de estudiantes de grado 10° de la Institución Educativa Técnico de Comercio Santa Cecilia de la ciudad de Cali, se concluye que:

Los estudiantes reconocen con mayor facilidad el modelo de función lineal, que el modelo de función lineal afín, es decir, en el establecimiento de las relaciones entre las unidades significantes en la conversión entre dos registros de representación semiótica, las variables de reconocimiento cualitativo, emergen con mayor facilidad en la primera función, que en la segunda. En este sentido, a pesar de que los estudiantes determinan las unidades significantes del modelo de función $y = f(x) = kx + b$, presentan dificultad para coordinar dos registros de representación, especialmente el grafico y simbólico.

Con respecto a las transformaciones (tratamientos o conversiones) de los registros de representación planteados en la propuesta de investigación, los estudiantes presentan mayor dificultad en las conversiones desde el registro gráfico, hacia el registro algebraico, y viceversa, esto, debido a que no relacionaron las unidades significantes ($k = 1$, $k < 1$, $k > 1$, $b = 0$, $b \neq 0$, entre otras), es decir, no realizan una correspondencia entre los registros convertidos. En este mismo sentido, la transformación que más les favorece, es la puesta en correspondencia entre las representaciones verbales y la gráfica cartesiana, o representación tabular y registro verbal, donde en promedio las tres cuartas partes de los estudiantes, corresponden al análisis a priori planteado en el capítulo 3. En estas conversiones, reconocen que la función $y = f(x) = kx$, es un caso particular del modelo $y = f(x) = kx + b$, cuando $b = 0$.

En cuanto al objetivo específico 3, a partir del cual se evaluó el proceso de los estudiantes de grado 10° de la Institución Educativa Técnico de Comercio Santa Cecilia de la ciudad de Cali, en la aproximación al concepto de función lineal y afín, a partir de la implementación de una propuesta de aula, se concluye que:

Los estudiantes empezaron la conceptualización de la función lineal, a partir del reconocimiento de la constante de proporcionalidad en la situación problema 1, donde las razones entre dos magnitudes directamente proporcionales, les permitió determinar que este valor es invariante. Posterior a ello, a partir de las transformaciones entre los diferentes registros de representación, y utilizando la modelación, en las situaciones 1 y 2, los estudiantes, reconocen el modelo de función lineal, cuya expresión algebraica es $y = f(x) = kx$. A partir de este modelo, los estudiantes reconocen algunos aspectos e esta clase de función, tales como: Tipo de recta (abre hacia la derecha, o abre hacia la izquierda), significado del valor de k, entre otras.

La conceptualización de la función lineal afín, se inició a partir de la situación problema 2, donde los estudiantes verificaron a partir del contraste entre las preguntas 3 y 5, que la constante de proporcionalidad, es ahora, la razón entre los incrementos entre los valores de la variable dependiente (y), y los valores de la variable independiente (x). Esta conjetura, les permitió reconocer que la representación gráfica de esta nueva función cuya expresión algebraica, es una línea recta que tiene un punto fijo, que va a ser la constante aditiva $+b$.

Con las situaciones 3 y 4, el proceso de acercamiento al concepto de función lineal, sigue avanzando, ya que en la situación 3, los estudiantes reconocen que el trazo de la línea recta, puede ser de distintas formas, es decir, si la línea recta en la representación gráfica, abre hacia la derecha, implica que $k > 0$, si $k < 0$, su representación gráfica abre hacia la izquierda, etc. La utilización del recurso del software GeoGebra, permitió a los estudiantes, realizar validaciones sobre las función trabajadas, que a lápiz y papel, eran difíciles de visualizar, tales como el valor de b en la expresión algebraica de la función lineal afín, que representa el desplazamiento de la función en la representación gráfica.

En cuanto a la pregunta problematizadora de la investigación, los aspectos del pensamiento variacional que favorecen a los estudiantes de grado 10° de la Institución Educativa Técnico de Comercio Santa Cecilia, a través de la implementación de la propuesta de aula, es que reconocen a través de fenómenos de variación y de cambio, los modelos matemáticos de función lineal y afín, que están representados de diferentes formas, ya sea gráfica, simbólica, numérica o tabular, y verbal. En este sentido, las producciones de los estudiantes, dejan ver la relación del proceso inherente a este tipo de pensamiento, que es la modelación matemática, la cual utilizan, para reconocer lo que cambia de lo que permanece constante, luego realizar esquemas mentales que utilizaron para obtener resultados, que contrastaron con el modelo de función que obtuvieron.

Con respecto a los propósitos esperados en cada una de las tareas de cada situación, a partir de las transformaciones (tratamiento o conversión) entre los diferentes registros de representación, los resultados de las producciones de los estudiantes, dejaron ver como se estableció en el marco teórico de referencia, que el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de función lineal y afín, es un proceso complejo, que implica además de tareas de yuxtaposición entre dos registros de representación, tareas de comparación que permita analizar las posibles variaciones de su contenido, cuando existe una coordinación interna entre ellos.

6.2 Reflexiones sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de función lineal y afín

El proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de función lineal y afín, a partir de situaciones problema que contiene distintos registros de representación semiótica, permitió que los estudiantes donde se implementó la propuesta, reconocieran los modelos de funciones lineal y afín. Desde una visión tradicionalista de la educación, el proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones mencionadas, se enfatiza en el tratamiento de las expresiones algebraicas que las representan, es decir, la actividad matemática de los estudiantes, está limitada a un solo registro de representación, mientras que a partir de la puesta en correspondencia entre dos registros, se realiza la comprensión de este concepto, porque hay una coordinación interna entre sus diferentes representaciones (Duval, 2006).

De igual forma, el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de función investigado, es un proceso complejo, que implica muchos aspectos o elementos, dentro de las cuales se pueden considerar entre otros, los siguientes: referentes teóricos dados por el MEN (Lineamientos Curriculares, Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, Resultados de las pruebas saber, etc.,), la didáctica de las matemáticas, estrategias de enseñanza y aprendizaje, investigaciones realizadas sobre el concepto a implementar, y todos aquellos aspectos que puedan aportar en la comprensión de los estudiantes. Asimismo, se pudo evidenciar a partir de la implementación de la propuesta de aula, que el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de función lineal, es un proceso que no se realiza en un grado en particular, sino que debe tener una complejidad conceptual, en la actividad escolar de los estudiantes.

7. Referencias

Apostol, T. M. (1991). *Calculus Volumen I. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Algebra Lineal*. Reverté. Recuperado de https://calculounicaes.files.wordpress.com/2012/04/calculo-volumen-1-de-tom-apostol.pdf

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf

Azcárate, C., y Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Síntesis.

Brousseau, G. (1990). *¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la Didáctica de las Matemáticas? (Primera parte)*. Enseñanza de las Ciencias, 8(3), 259-267.

Brousseau, G. (1991). *¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la Didáctica de las Matemáticas? (Segunda parte)*. Enseñanza de las Ciencias, 9(1), 10-21.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali. Universidad del Valle. Traducción Myriam Vega Restrepo.

Duval, R. (2001). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo.* Cali. Universidad del Valle. Traducción Myriam Vega Restrepo.

Duval, R. (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación*. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española 9 (1), 143-168. Recuperado de http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=546

Farfán, R., y García, M. A. (2005). El concepto de función: un breve recorrido epistemológico. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/5974/1/FarfanElconceptoAlme2005.pdf

Giménez, C. (Marzo, 2016). Uso de GeoGebra para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Uno. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*. Núm.71, pp.26-32.

González, J. (2016). GeoGebra en diferentes escenarios de actuación. *CLIC: Conocimiento Libre y Licenciamiento*, (14). Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/8694/1/CLIC_Prieto2016.pdf

Guzmán, R. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *1*(1). Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/335/33510102.pdf

Lipschuttz, S. (1970). *Teoría y problemas de topología general*. Cali. Universidad del Valle. Traducción. Antonio Linares Alonso

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Matemáticas. Lineamientos Curriculares.*

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.*

Ministerio de Educación Nacional. (2015). *Informe por colegios. Pruebas saber 3°, 5° y 9°. Aterrizando los resultados de aula*. Recuperado de http://aprende.colombiaaprende.edu.co/es/informes

Múnera, J. J. (2011). Una estrategia didáctica para las matemáticas escolares desde el enfoque de situaciones problema. *Revista educación y pedagogía*, *23*(59), 179. Recuperado de http://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/revistaeyp/article/viewFile/8694/8007

Obando, G., y Múnera, J. J. (2003). Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática. *Revista Educación y Pedagogía*, 15(35), 185-199. Recuperado de http://bibliotecadigital.udea.edu.co/dspace/bitstream/10495/3086/1/ObandoGilberto_2003_Situacionesproblemaestrategia.pdf

Posada, M. E. (2005). *Interpretación e implementación de los estándares básicos de matemáticas.* Gobernación de Antioquia. Secretaria de Educación para la Cultura.

Posada Balvín, F. A., & Villa, J. A. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional.* Tesis de maestría. Recuperado de http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/1380/1/JC0234.pdf

Restrepo, G. (1995). *Introducción al algebra lineal*. Universidad del Valle.

Restrepo, G. (1998). *Los Fundamentos de las matemáticas*. Universidad del Valle.

Vasco, C. E. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. In *Anais eletrônicos do CIAEM–Conferência Interamericana de Educação Matemática, Blumenau* (Vol. 9). Recuperado de http://pibid.mat.ufrgs.br/2009-2010/arquivos_publicacoes1/indicacoes_01/pensamento_variacional_VASCO.pdf

Valoyes, L., y Malagón, M. (2004). *Formación de pensamiento algebraico en la educación escolar*. Cali. Universidad del Valle.

Anexos. Situaciones problema implementadas

República de Colombia

Santiago de Cali

Institución Educativa Técnico De Comercio Santa Cecilia
Resolución Aprobación 4143.2.21.1983 de Abril 21 2008
DANE – 176001001672 – NIT 800108931 – 1

Tema: Funciones Lineales
Área: Matemáticas
Grado: 10°
Profesor: Lic. Diego Solarte Pabón

Año Lectivo: 2.017
Fecha: Abril 05 de 2.017

Cuestionario 1

Estándares Básicos de Competencia: Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas. Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.

Tiempo: Clase de dos sesiones de 55 minutos.

Instrucciones: En grupos de tres estudiantes, responda las tareas 1 y 2 de la situación problema 1, realizando los procedimientos correspondientes.

Situación problema 1: Magnitudes directamente proporcionales

Tarea 1: El costo ($) de las fotocopias, depende de su cantidad. Diez fotocopias cuestan $ 300. Responda las siguientes preguntas

1. ¿Qué magnitudes intervienen en el problema? ¿Cada cuánto aumenta el costo de las fotocopias?
2. ¿Cuál es la razón entre el costo ($), y el número de fotocopias $\left(\frac{costo\ (\$)}{numero\ de\ fotocopias}\right)$?
3. ¿Cuántas fotocopias corresponden a $ 480?

4. Complete los valores de la tabla 1.

Tabla 1. Costo de cierta cantidad de fotocopias

Numero de Fotocopias	2	4	6	8	10	12	14
Costo ($)	60	120	180	240	300	360	420

5. ¿Cuál es el procedimiento para completar cada dato de la tabla?
6. Escriba las razones entre el costo ($), y el número de fotocopias de la tabla. ¿Qué valor se obtiene?, explique.
7. Es posible, ¿encontrar el costo de cualquier cantidad de fotocopias?, explique
8. Represente la tarea 1, en un plano cartesiano

Tarea 2: La distancia recorrida por un vehículo, depende de su cantidad. La figura 1, muestra la distancia recorrida por un automóvil cada vez que transcurre una hora.

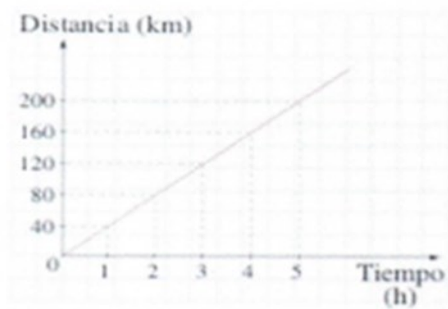


Figura 1. Distancia recorrida por un automóvil, durante varias horas.

Conteste cada una de las preguntas, de acuerdo a la figura 1.

1. ¿Qué magnitudes intervienen en el problema?
2. Escriba las razones, entre la distancia recorrida (km) y el tiempo (h). ¿Qué valor se obtiene?
3. Si la velocidad del automóvil es $v = \frac{distancia}{tiempo}$, ¿cuál es su velocidad?

4. ¿Cuál fue la distancia máxima recorrida por el automóvil? ¿Cuánto tiempo utiliza?
5. De acuerdo con la gráfica, complete los valores de la tabla 2:

Tabla 2. Distancia recorrida por un automóvil, de acuerdo a su tiempo

Tiempo (h)	0	1	2	3	4	5	6
Distancia (km)	0	40	80	120	160	200	240

6. ¿Cuál es la distancia recorrida por el automóvil, transcurridas 10 y 15 h, respectivamente? Explique.
7. ¿Cuál sería la forma para calcular la distancia recorrida ($\boldsymbol{d}$) por el automóvil, para cualquier valor de tiempo $\boldsymbol{t}$ (h)?

Solución

Situación problema 1

tarea 1.

1) las magnitudes que intervienen en el problema son la cantidad de copias y el costo

- El costo aumenta cada 30 pesos

$ 30 x 8 = 240 pesos $ 30 x 10 = 300 pesos

2) $\frac{\$60}{2} = 30$ $\frac{\$240}{8} = 30$ $\frac{\$420}{14} = 30$

$\frac{\$120}{4} = 30$ $\frac{\$300}{10} = 30$

$\frac{\$180}{6} = 30$ $\frac{\$360}{12} = 30$

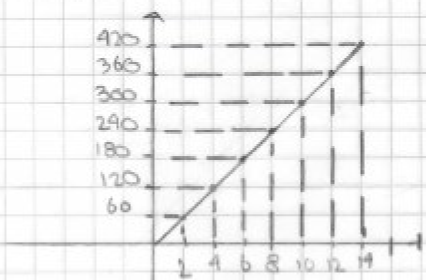
3) $480 corresponden a 16 fotocopias

$ 30 x 16 = $480

5) para completar la tabla se tienen que multiplicar 30 pesos por la cantidad de copias

4) Si es posible, porque sabemos cada cuanto cambia el costo y así mismo lo podemos multiplicar por la cantidad de copias

8)



1. Las magnitudes que intervienen son: La distancia y el tiempo

2) $\frac{200 \text{ km}}{5 \text{ h}} = 40$ $\quad$ $\frac{160 \text{ km}}{4 \text{ h}} = 40$

$\frac{120 \text{ km}}{3 \text{ h}} = 40$ $\quad$ $\frac{80 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 40$ $\quad$ $\frac{40 \text{ km}}{1 \text{ h}} = 40$

R// Se obtienen 40 km

3) $V = \frac{200 \text{ km}}{5 \text{ h}} = 40 \text{ km}$

R// La velocidad es de 40 km

4) R// La maxima distancia recorrida por el automovil es de 200 km en un tiempo de 5h

6) 40 km = 1 h

40 km x 10 h = 400 km

40 km x 15 h = 600 km

R// Cada hora se recorren 40 km, tomando esto como punto de partida multiplicamos 40 km por el Número de horas

República de Colombia

Santiago de Cali

Institución Educativa Técnico De Comercio Santa Cecilia
Resolución de Aprobación 4143.2.21.1983 de Abril 2008
DANE – 176001001672 – NIT 800108931 – 1

Tema: Funciones Lineales
Área: Matemáticas
Grado: **Año Lectivo:** 2.017
Profesor: Lic. Diego Solarte Pabón **Fecha:** Abril 26 de 2.017

Cuestionario 2

Estándares Básicos de Competencia: Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas. Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.

Tiempo: Clase de dos sesiones de 55 minutos.

Instrucciones: En grupos de tres estudiantes, responda las tareas 1 y 2 de la situación problema 3, realizando los procedimientos correspondientes.

Situación problema 2: Magnitudes proporcionales

Tarea 1: La figura 1, muestra la relación entre el consumo de agua en metros cúbicos (m^3) de varios hogares del municipio de Cali, y el costo ($) de dicho servicio.

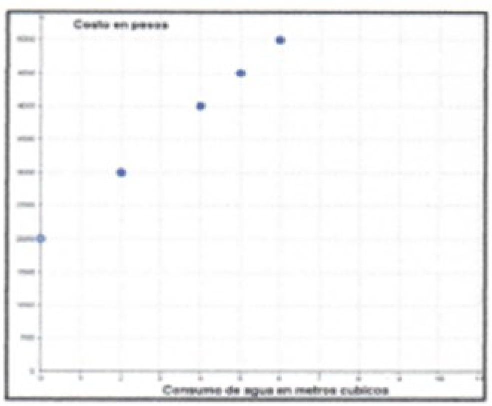


Figura 1: Costo ($) del consumo de agua en metros cúbicos.

Conteste cada una de las preguntas, de acuerdo a la figura 1.

1. ¿Cuánto le toco pagar al que más agua gastó?
2. Al hogar que no gastó agua, ¿Cuánto le tocó pagar?
3. Escriba las razones, entre el costo ($) y el consumo de agua ($m^3$). ¿Qué valor se obtiene? ¿Se obtiene una constante como en las tareas de las situaciones anteriores?
4. De acuerdo con la gráfica, complete los valores de la tabla 1:

Tabla 1. Costo ($) del consumo de agua en metros cúbicos.

Consumo de agua (m^3)	2	4	5	6	8	10	56
Costo ($)	3000	4000	4500	5000	6000	7000	30000

5. ¿En cuánto se incrementa el costo de la factura por cada metro cubico adicional de consumo de agua?
6. ¿Cuál es la razón entre el incremento del costo de la factura y cada metro cubico adicional de consumo de agua? ¿Qué valor se obtiene?
7. ¿Cuál es la expresión matemática que permite calcular el costo de cualquier número de metros cúbicos consumidos?

Tarea 2: Juan es un taxista que cobra por subir al taxi (banderazo) un costo fijo de $ 400 y $ 80 por cada trayecto de 200 metros recorridos. Si x representa el número de trayectos recorridos, la función que permite determinar el costo de un viaje en el taxi de Juan, es

$$y = f(x) = 80x + 400$$

La tabla 1, representa algunos trayectos recorridos

Tabla 1. Costo del viaje por trayectos

Cantidad de trayectos (x)	**Costo del viaje $f(x)$**
0	400
1	480
2	560
3	640

Conteste cada una de las preguntas, de acuerdo con la tabla 1.

1. ¿Qué representa que el costo de un viaje sea de $ 400?
2. ¿Cuál es la razón entre el incremento del costo ($) del viaje y cada trayecto recorrido? ¿Qué valor se obtiene? ¿Qué valor representa de la expresión matemática?
3. De acuerdo con la función $y = f(x)$ que permite calcular el costo de un viaje en el taxi de Juan, complete los valores de la tabla 2:

Tabla 2. Costo ($) del consumo de agua en metros cúbicos.

x	2	4	6	10	20	50	100
$y = f(x)$	560	720	880	1.200	2.000	4.400	8.400

4. Construya la gráfica que representa la función $y = f(x)$ para $x \in [0, 5]$
5. Si el costo de un viaje es de $ 2800, ¿Cuántos trayectos recorrió el taxi? Explique

Tarea 1: Solución

① al que más agua gastó le tocó pagar $ 5000

② Al hogar que no gastó agua le tocó pagar $ 2000

③

$\$\frac{3000}{2m^3} = \$1500$

$\$\frac{4000}{4m^3} = \$1000$

$\$\frac{4500}{5m^3} = \$900$

$\$\frac{5000}{6m^3} = \$833$

* no se obtiene una constante.

⑤ El costo está cambiando cada $ 500 por cada m^3.

$\Delta y = \$500$ el número de copias está cambiando de 1 en 1 $\Delta x = 1$

⑥ La razón entre el incremento de la factura y el metro cúbico, es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\$500}{1m^3} = \frac{\$500}{m^3}$$

⑦ La expresión matemática es:

Costo = k · Cantidad m^3 + 2000

$y = k \cdot x + 2000$

Desarrollo

Tarea 2:

1.R/ Lo que representa que el costo del viaje sea $ 400, el trayecto fue: 0.

2. Razón del incremento

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \frac{480}{1} - \frac{400}{0} = \$80 \text{ (costo del viaje)}$$

- El valor que se obtiene es: $80
- $K = 80$ por cada trayecto K = constante

4.R/ $x \in [0,5]$

cuando $x=0$: 400

cuando $x=1$: $400+80 = 480$

cuando $x=2$: $480+80 = 560$

cuando $x=3$: $560+80 = 640$

cuando $x=4$: $640+80 = 720$

cuando $x=5$: $720+80 = 800$

5.R/ El trayecto que recorrio el taxista fue: 30

$80.30+400 = 2800$

República de Colombia

Institución Educativa Técnico De Comercio Santa Cecilia
Resolución de Aprobación 4143.2.21.1983 de Abril 2008
DANE – 176001001672 – NIT 800108931 – 1

Santiago de Cali

Tema: Funciones Lineales
Área: Matemáticas
Grado: **Año Lectivo:** 2.017
Profesor: Lic. Diego Solarte Pabón **Fecha:** Junio 21 de 2.017

Cuestionario 3

Estándares Básicos de Competencia: Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. Analizo en representaciones graficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas. Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan.

Tiempo: Clase de dos sesiones de 55 minutos.

Instrucciones: En grupos de tres estudiantes, responda las tareas 1 y 2 de la situación problema 3, realizando los procedimientos correspondientes.

Situación problema 3: Magnitudes proporcionales

Tarea 1: Aguas del Valle es una empresa de acueducto que presta el servicio de agua potable al Valle del Cauca. La factura que reciben los usuarios, tienen un cargo básico de $15.000, y cada metro cubico (m^3) consumido en un hogar tiene un costo de $2.000.

La tabla 1, representa la función que permite calcular el costo de una factura, para algunos metros cúbicos consumidos.

Tabla 1. Costo del viaje por trayectos

Cantidad de metros cúbicos	**Costo ($) de la factura**
0	15.000
2	19.000
4	23.000
10	35.000

Conteste cada una de las preguntas, de acuerdo con la tabla 1.

1. ¿Qué representa que el costo de una factura de un usuario sea de $ 15.000?
2. Represente los datos de la tabla 1 en un plano cartesiano
3. Si $y = f(x)$ representa la función que permite calcular el ***costo de una factura***, ¿cuál es la expresión matemática de la forma $y = f(x) = k.x + b$, que permite calcular el costo para cualquier cantidad $\boldsymbol{x}$ de metros cúbicos de agua consumidos por un hogar?
4. Si el costo de una factura es de $ 45.000, ¿Cuántos metros cúbicos de se consumieron?
5. Para 5 metros cúbicos de agua consumidos, ¿cuál es el valor de la factura a cancelar?

Tarea 2: La cantidad de combustible de un vehículo, varía de acuerdo a la distancia recorrida. La figura 1, muestra la distancia recorrida por un automóvil que tiene un tanque con capacidad de 60 litros.

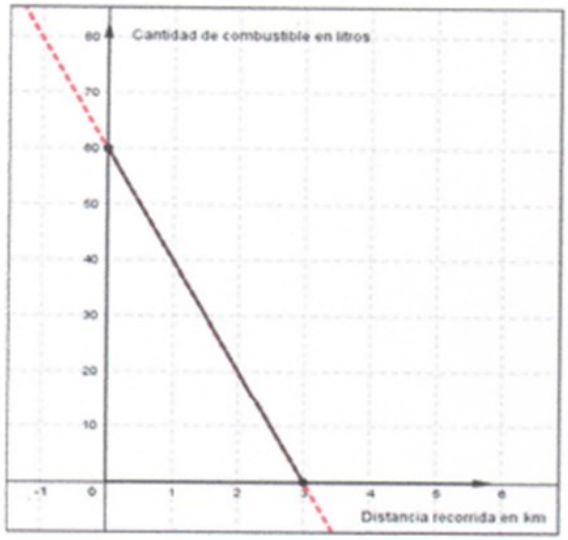


Figura 1. Cantidad de combustible por cada km. recorrido

Conteste cada una de las preguntas, de acuerdo con la figura 1.

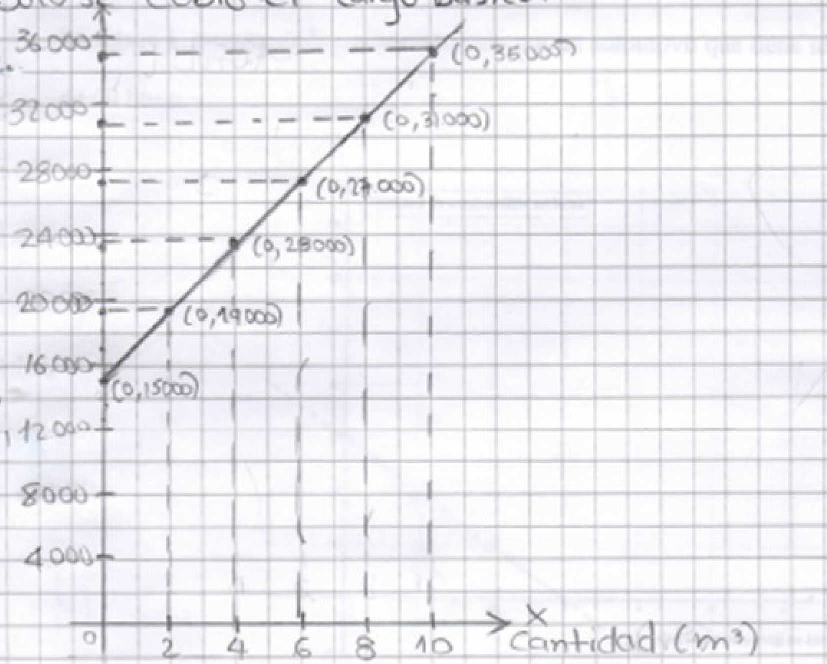
1. ¿Qué representa en la línea recta, el punto $(0, 60)$ y $(3, 0)$, respectivamente?
2. Al recorrer 2 km de distancia, ¿Cuánto combustible consume el vehículo?
3. ¿Cuál es la razón entre cambio de la cantidad de combustible y la distancia recorrida por el automóvil? ¿Qué valor se obtiene?
4. Si $y = f(x)$ representa la cantidad de combustible y x representa la distancia recorrida por el automóvil, ¿cuál es la expresión algebraica que permite calcular la cantidad de combustible?
5. Si el vehículo recorre una distancia de 1,5 km, ¿Cuánto combustible tiene el vehículo?

Desarrollo

Tarea 1.

1. Que no hubo consumo de metros cúbicos en agua, es decir, Solo se Cobró el cargo básico.

2.



3. $\boxed{y = K \cdot x + b}$

K = constante
X = metros cúbicos
b = constante.

$\$19.000 = \$\frac{2000}{1m^3} \cdot 2m^3 + \$15.000$

4. $\$45.000 = \$\frac{2.000}{1m^3} \cdot \boxed{15\,m^3} + \$15.000$

Se consumieron $15\,m^3$

5. $\boxed{\$25.000} = \$2000 \cdot 5m^3 + \$15000$

El valor de la factura es de $25.000.

Tarea 2.

1. el punto 60 Representa O distancia recorrida en kilometros

* 3 kilometros representa 0 ya que no consumio nada de combustible

2. al recorrer 2 kilometros de distancia el vehiculo consumio 40L de combustible

3. La razón es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-40L}{2km} = -20 L/km \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-20\ L}{1km} = -20 L/km \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-60L}{3} = -20 L/km$$

El valor que siempre se obtiene es: $-20\ L/km$

4. $\Delta y = -20L$

$\Delta x = 1$

R/ La expresión algebraica que permite calcular la cantidad de combustible es:

$$\boxed{k \cdot x + b}$$

$$40L = \frac{-20L}{1km} \cdot 1 + 60L$$

$$20L = \frac{-20L}{1km} \cdot 2 + 60L$$

República de Colombia

Santiago de Cali

Institución Educativa Técnico De Comercio Santa Cecilia
Resolución de Aprobación 4143.2.21.1983 de Abril 2008
DANE – 176001001672 – NIT 800108931 – 1

Tema: Función Lineal
Área: Matemáticas
Grado:
Profesor: Lic. Diego Solarte Pabón

Año Lectivo: 2.017
Fecha: Junio 28 de 2.017

Cuestionario 4

Instrucciones: Lea atentamente cada una de las tareas asignadas en el cuestionario. Los archivos a manipular, son construcciones en el software matemático GeoGebra. En grupos de tres estudiantes, responda las preguntas de cada una de las tareas, realizando los procedimientos correspondientes.

Estándares Básicos de Competencia:

Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.

Tiempo: Clase de dos sesiones de 55 minutos.

Situación problema 4:

Tarea 1: Ingrese al link https:**//www.geogebra.org/materials/.** Busque el archivo **Función lineal 1** de Diego Solarte Pabón, y descárguelo. Abra el archivo y verifique que su interfaz aparezca como en la figura 1. Mueva el deslizador k, $(-5 < k < 5, k\ un\ número\ real)$ y verifique que la función cambia gráficamente y algebraicamente.

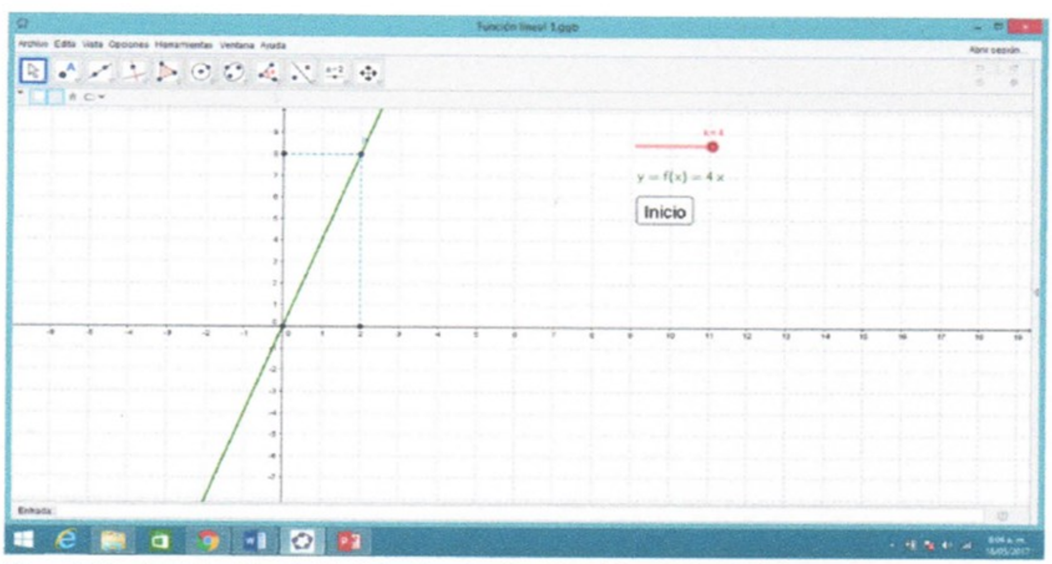


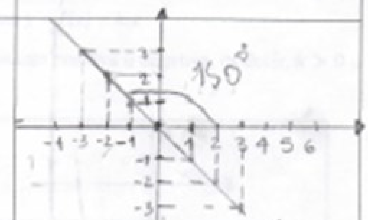
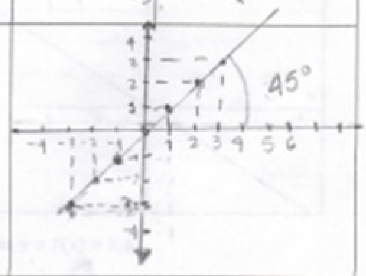
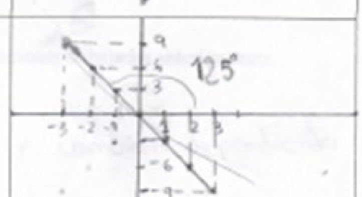
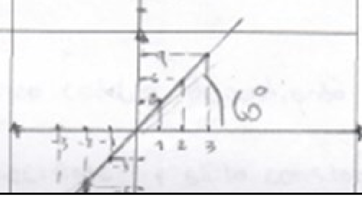
Figura 1: Interfaz del archivo de GeoGebra Función lineal 1 de Diego Solarte Pabón

Conteste cada una de las preguntas, justificando con los procedimientos correspondientes.

1. Mueva el deslizador de tal forma que $k = 2$. Ubique el punto P de la función, de tal forma que asigne distintos valores en el plano cartesiano. Complete los valores de la tabla:

Valor de x	Valor de $y = f(x)$	P (x, y)
-2	-4	(2,4)
-1	-2	(-1, -2)
0	0	(0,0)
1	2	(1,2)
2	4	(2,4)
3	6	(3,6)

2. Mueva el deslizador de tal forma que k sea equivalente a -1, 1, -3 y 3, respectivamente. Complete los valores de la tabla:

Valor de k	Representación algebraica de la función	Representación gráfica de la función
$k = -1$	y : f(x) : -1 . x	
$k = 1$	y : f(x) : 1 . x	
$k = -3$	y : f(x) : -3 . x	
$k = 3$	y : f(x) : 3 . x	

3. ¿Qué conclusión obtienes a partir de la información de la tabla anterior
4. Utilizando transportador, mide el ángulo que se forma entre la función $y = f(x)$ y el eje x (Eje de las abscisas), cuando k es 1 y 3, respectivamente. ¿Representan la misma función?, justifique su respuesta.
5. Dadas las funciones de la figura 2, ¿cuál tiene constante $k = 1$ o $k > 1$?, justifique.

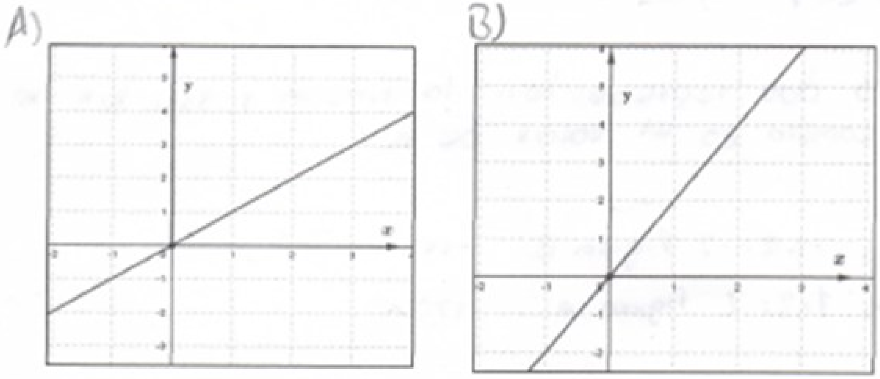


Figura 2: Función lineal de la forma $y = f(x) = k.x$

6. Dadas las funciones de la figura 3, ¿cuál tiene constante positiva o negativa, es decir, $k > 0$ o $k < 0$?, justifique.

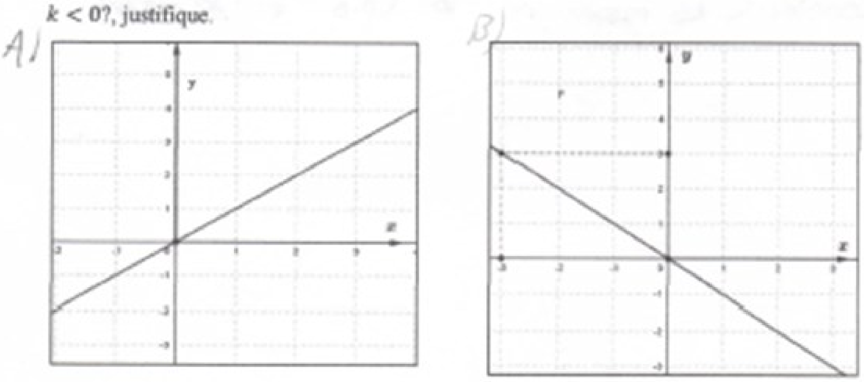


Figura 3: Función lineal de la forma $y = f(x) = k.x$

7. Escriba dos conclusiones (características) de las funciones trabajadas anteriormente.

3P11 • Los valores en el eje y cambian dependiendo de la constante

• Se obtiene lineas rectas

• la direcion de la linea cambia dependiendo si el va es positivo o negativo

• Si es positivo es creciente y si la constante es

5. la figura A tiene constante de 1

la constante B>A (2>1) por que a medida que en la figura B el ese x va aumentando de 1 en 1 el ese y aumento de 2 en 2, y en la figura A el ese y aument de 1 en 1

4.) los dos representan la funcion $y = f(x) = K \cdot x$ lo unico que cambia es el valor de K

6) $f(x) = -1 \cdot 2 = -2$ figura B $-1 < 0$

$f(x) = 1 \cdot 2 = 2$ figura A $1 > 0$

7) si la constante es positivo la linia es creciente y si la constante es negativa la linia es decrecien

Tarea 2: Ingrese al link **https://www.geogebra.org/materials/.** Busque el archivo **Función lineal 2** de Diego Solarte Pabón, y descárguelo. Abra el archivo y verifique que su interfaz aparezca como en la figura 4. Mueva el deslizador k, $(-3 < k < 4, k\ un\ número\ real)$ y

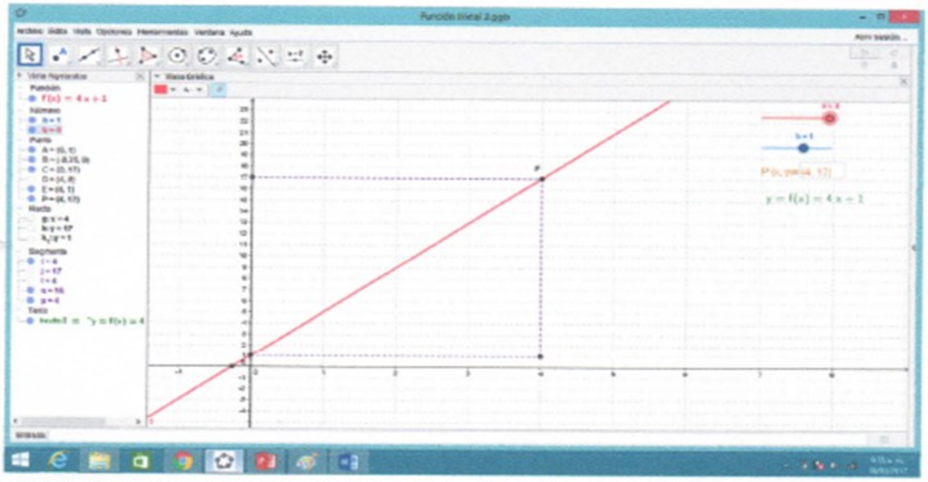
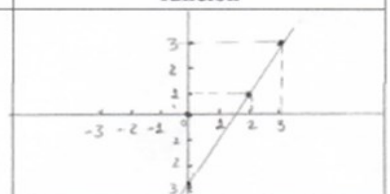
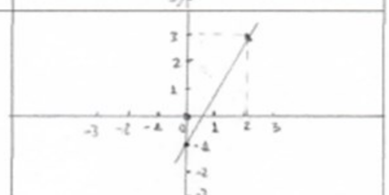
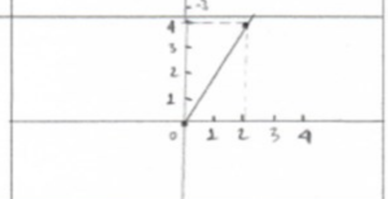
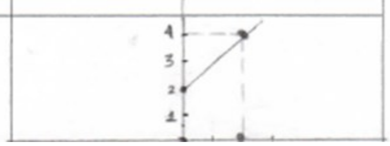


Figura 4: Interfaz del archivo de GeoGebra Función lineal 2 de Diego Solarte Pabón

verifique que la función cambia gráficamente y algebraicamente.

Conteste cada una de las preguntas, justificando con los procedimientos correspondientes.

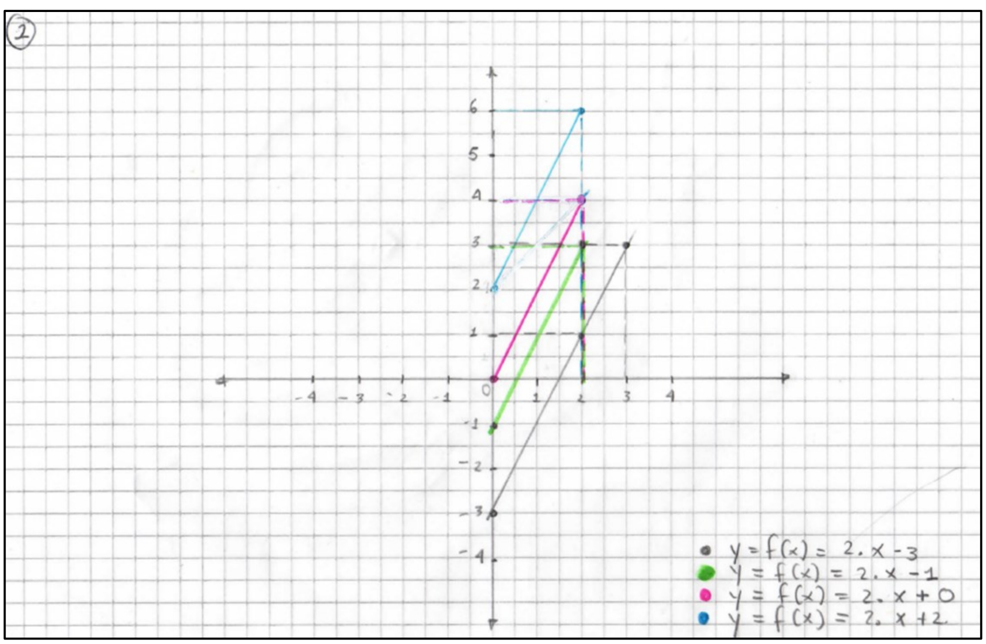
1. Mueva el deslizador k, de tal forma que $k = 2$. Mueva el valor de b $(-4 < b < 5)$, y complete los valores de la tabla:

Valor de *b*	Representación algebraica de la función	Representación gráfica de la función
b = −3	Y = f(x) = 2.x - 3	
b = −1	y = f(x) = 2.x - 1	
b = 0	y = f(x) = 2.x + 0	
b = 2	y = f(x) = 2.x + 2	

2. Represente en un mismo plano cartesiano las funciones de la tabla 1.
3. ¿Qué representa el valor de b en la familia de funciones $y = f(x) = 2.x + b$?
4. Mueva los deslizadores k y b, de tal forma que tomen los valores asignados. Mueva el punto P sobre la función, y complete los valores de la tabla:

Valores de k y b	Expresión algebraica de la forma $y = f(x) = kx + b$	Punto de corte con el eje x	Punto de corte con el eje y
$k = 1$ $b = -2$	y=f(x)=1.x-2	(2,0)	(0,-2)
$k = 0$ $b = 3$	y=f(x)=0.x+3	NO corta	(0,3)
$k = -4$ $b = 0$	y=f(x)-4.x+0	(0,0)	(0,0)
$k = -2$ $b = 4$	y=f(x)-2.x+4	(2,0)	(0,4)

5. ¿Qué sucede cuando la línea recta corta al eje x, y al eje y, respectivamente? Explique
6. En la función, $y = f(x) = -5x + 2$, en ¿qué punto la gráfica que la representa, corta al eje x y al eje y, respectivamente?



7. Dadas las gráficas de la figura 5, ¿cuál es la expresión algebraica que representa cada gráfica de la función? Explique

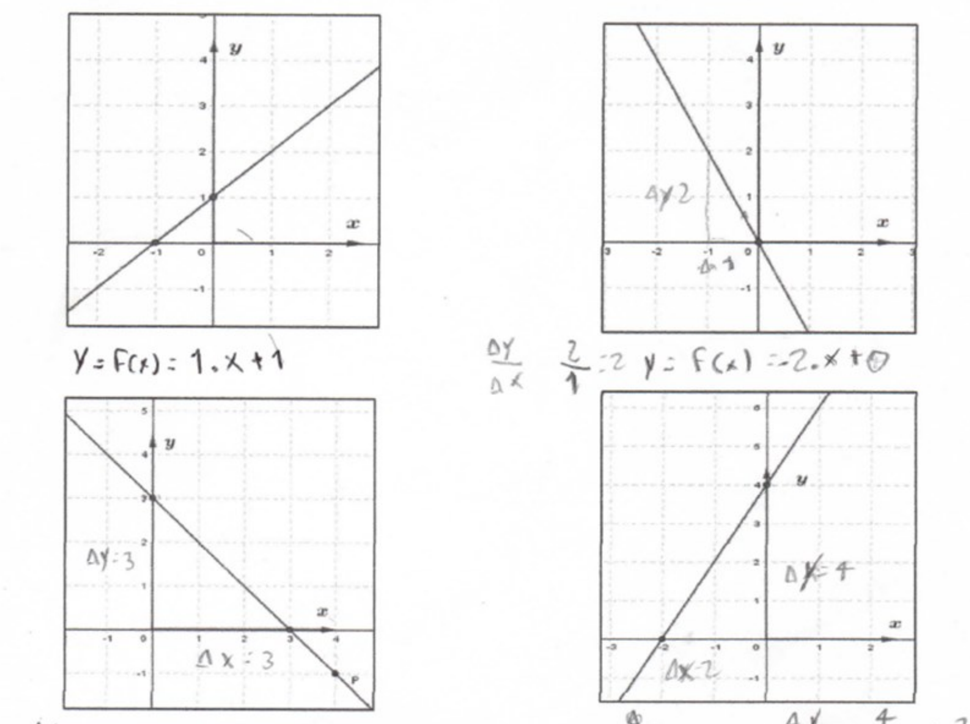


Figura 5: Representación gráfica de una función lineal $y = kx + b$

③ R/ b representa el valor fijo

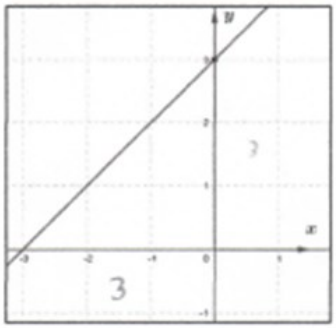
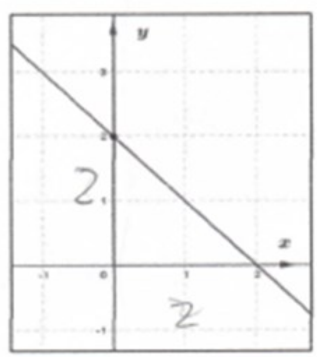
⑤ R/ Se obtiene un triangulo rectangulo.

⑥ R/ corta al eje x en (0,2), y no corta en el eje y

⑦ R/ k es la razón entre el cambio en el eje y y el cambio en el eje x.

b es el valor donde la linea corta el eje y

8. Complete los valores de la tabla, teniendo en cuenta la representación inicial y la representación final de cada función.

Representación inicial	**Representación final**
	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{3} = 1$ $y = f(x) = 1 . x + 3$
$y = f(x) = -4x$	
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{2} = -1$ $y = f(x) = -1 . x + 2$	

9. Las gráficas de la figura 6, representan una función de la forma $y = kx + b$. En ¿cuál de las dos gráficas, el valor de b=0? Justifique

La (9) se resuelve atras

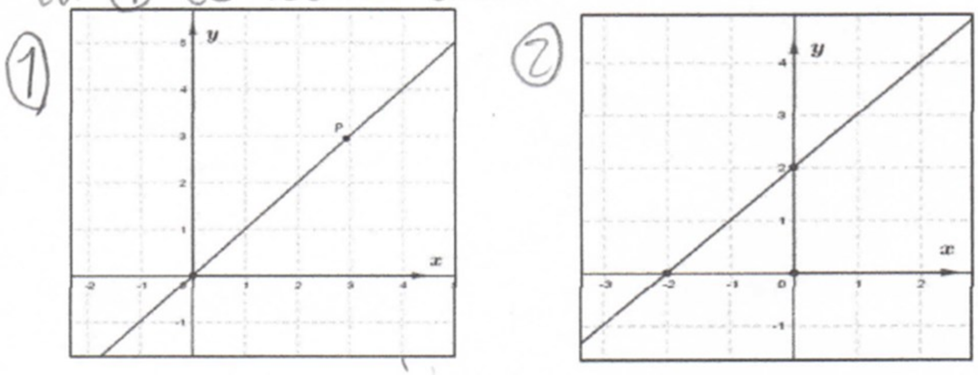
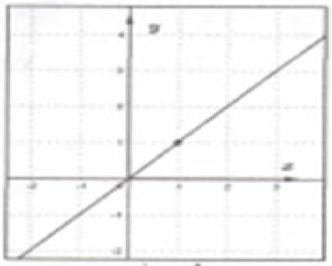


Figura 6. Representación gráfica de la función $y =$

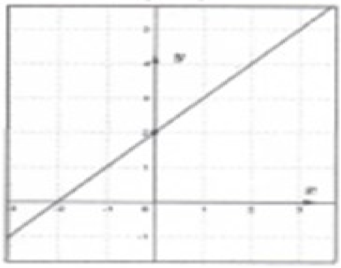
(9) R/ En la figura 1 b vale 0 porque la recta corta al eje Y en 0

10. Para cada una de las funciones de la figura 7, se realizan variaciones del contenido que las representan. Escribir la representación (grafica o expresión algebraica), según convenga



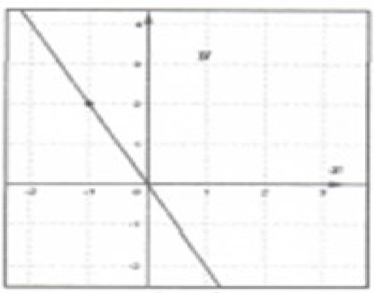
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{1} = 1$

$y = f(x) =$ 1.x + 0



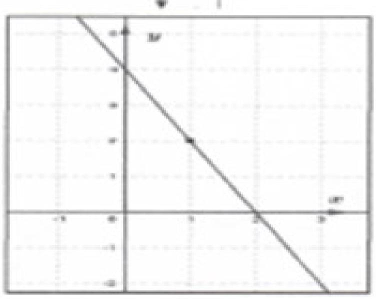
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$

$y = f(x) =$ 1. x + 2



$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1}$

$y = f(x) =$ 2.x + 0



$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2} = -2$

$y = f(x) =$ 2.x + 4